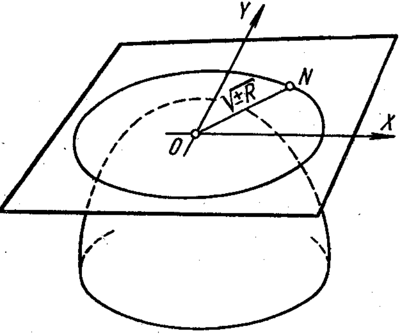

Рис. 108.

145. Индикатриса Дюпена и формула Эйлера. Фиксируя координатные оси так, как это было указано в предыдущем номере, построим в касательной плоскости, т. е. в плоскости XOY, вспомогательную кривую следующим образом: на всяком радиусе-векторе из начала O отложим отрезок $ON = \sqrt{\pm R}$, где R — радиус кривизны того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является касательной. Знак ($\pm$) выбираем так, чтобы под радикалом оказалась положительная величина. Геометрическое место концов N построенных отрезков дает кривую, которая называется *индикатрисой Дюпена*. Свойство этой кривой, согласно построению, следующее: квадрат любого ее радиуса-вектора дает абсолютное значение радиуса кривизны того нормального сечения, для которого взятый радиус-вектор является касательной (рис. 108).

Составим уравнение индикатрисы Дюпена. Пусть (ξ, η) — координаты переменной точки N на индикатрисе. Согласно построению

$$\xi = \sqrt{\pm R}\cos\theta,$$
$$\eta = \sqrt{\pm R}\sin\theta,$$

т. е.

$$\xi^2 = \pm R\cos^2\theta,$$
$$\eta^2 = \pm R\sin^2\theta,$$

причем при положительном R надо брать верхний знак, а при отрицательном — нижний. Умножая обе части равенства (57) на $\pm R$, получим, в силу (57):

$$r_0\xi^2 + 2s_0\xi\eta + t_0\eta^2 = \pm 1. \tag{58}$$

Это и есть уравнение индикатрисы Дюпена. Кривая эта дает геометрически наглядное представление об изменении величины радиуса кривизны при вращении нормального сечения вокруг нормали к поверхности. В эллиптическом случае кривая (58) есть эллипс, и в правой части надо брать определенный знак. В гиперболическом случае уравнению (58) соответствуют две сопряженные гиперболы. В параболическом же случае левая часть уравнения (58) есть полный квадрат, и его можно переписать в виде

$$k(a\xi + b\eta)^2 = \pm 1, \quad \text{т. е.} \quad (a\xi + b\eta)^2 = \pm\frac{1}{k} = l^2$$

или

$$a\xi + b\eta = \pm l,$$

и мы имеем совокупность двух параллельных прямых. Во всех трех случаях точка O является центром кривой, и кривая имеет две оси симметрии. Мы можем выбрать оси OX и OY совпадающими с этими осями симметрии; при этом, как известно, в левой части уравнения (58) пропадает член, содержащий произведение $\xi\eta$, т. е. при указанном выборе осей должно быть $s_0 = 0$, и формула (57) даст при таком выборе осей OX и OY

$$\frac{1}{R} = r_0\cos^2\theta + t_0\sin^2\theta. \tag{59}$$

Выясним геометрический смысл коэффициентов r_0 и t_0. Полагая в формуле (59) $\theta = 0$, мы получим кривизну $\frac{1}{R_1}$ нормального сечения, касающегося оси OX, и, следовательно, $r_0 = \frac{1}{R_1}$. Точно так же, полагая $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим, $t_0 = \frac{1}{R_2}$, где $\frac{1}{R_2}$ — кривизна нормального сечения, касающегося оси OY. Подставляя найденные значения r_0 и t_0 в формулу (59), получим *формулу Эйлера*

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}. \tag{60}$$

Заметим, что направления осей OX и OY совпадают с направлениями осей симметрии кривой (58). Положим, что $\frac{1}{R_1} \neq \frac{1}{R_2}$ и что, например, $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$. Из формулы (60) непосредственно следует, что $\frac{1}{R}$ достигает наибольшего значения при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ и наименьшего значения — при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Полученный результат формулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 3. *В каждой точке поверхности существуют два взаимно перпендикулярных направления в касательной плоскости, для которых кривизна $\frac{1}{R}$ достигает максимума и минимума, и если $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$ — соответствующие этим направлениям значения кривизны, то кривизна любого нормального сечения выражается по формуле* (60), *где θ — угол, образованный касательной к рассматриваемому нормальному сечению с тем направлением, которое дает кривизну $\frac{1}{R_1}$.*

Радиусы кривизны R_1 и R_2 называются *главными радиусами кривизны нормальных сечений* в рассматриваемой точке. Те два направления в касательной плоскости, которые их дают, называются *главными направлениями*. Кроме того в гиперболическом случае полезно отметить еще два направления в касательной плоскости, а именно — направления асимптот индикатрисы Дюпена. Для этих *асимптотических направлений* радиус-вектор индикатрисы равен бесконечности, и кривизна соответствующего нормального сечения в рассматриваемой точке равна нулю.

В эллиптическом случае R_1 и R_2 имеют одинаковые знаки. В гиперболическом случае эти величины будут разных знаков. В параболическом же случае кривизна одного из главных нормальных сечений будет равна нулю, и, считая, например, $\frac{1}{R_2} = 0$, мы будем иметь в параболическом случае формулу

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{R_1}.$$

Отметим еще один частный случай точек поверхности эллиптического типа, а именно тот случай, когда величины R_1 и R_2 одинаковы, т. е. $R_1 = R_2$. Формула (60) даст при этом $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}$, т. е. в данном случае все нормальные сечения имеют в рассматриваемой точке одинаковую кривизну. Такая точка поверхности называется *точкой закругления*, или *омбилической точкой*. Можно доказать, что сфера — единственная поверхность, все точки которой омбилические.