146. Определение главных радиусов кривизны и главных направлений. Перепишем основную формулу (56) для кривизны нормального сечения в виде

$$(L - ER^{-1})\,du^2 + 2\,(M - FR^{-1})\,du\,dv + (N - GR^{-1})\,dv^2 = 0. \quad (61)$$

Деля на dv^2 и вводя вспомогательную величину $t = \frac{du}{dv}$, характеризующую направление касательной к нормальному сечению, получим уравнение:

$$\varphi(R^{-1},\ t) = (L - ER^{-1})\,t^2 + 2\,(M - FR^{-1})\,t + (N - GR^{-1}) = 0,$$

из которого кривизна R^{-1} нормального сечения определяется в зависимости от t. Для главных направлений величина R^{-1} должна достигать максимума или минимума, а потому производная от R^{-1} по t должна обращаться в нуль. Но эта производная выражается, очевидно, формулой **[I, 69]**

$$\frac{dR^{-1}}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial R^{-1}}},$$

и, следовательно, для главных направлений производная $\frac{d\varphi}{dt}$ должна обращаться в нуль, т. е.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (L - ER^{-1})\,t + (M - FR^{-1}) = 0.$$

Заменяя $t = \frac{du}{dv}$ и умножая на dv, получим

$$(L - ER^{-1})\,du + (M - FR^{-1})\,dv = 0. \quad (62)$$

Если бы мы разделили уравнение (61) на du^2 и за переменную, характеризующую направление касательной, взяли бы $t_1 = \frac{dv}{du}$, то совершенно так же получили бы для главных направлений равенство

$$(M - FR^{-1})\,du + (N - GR^{-1})\,dv = 0. \quad (63)$$

Перенося в равенствах (62) и (63) члены с dv направо и почленно деля одно равенство на другое, мы получим квадратное уравнение для определения кривизны главных нормальных сечений, т. е. $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$:

$$(EG-F^2)\frac{1}{R^2}+(2FM-EN-GL)\frac{1}{R}+(LN-M^2)=0. \qquad (64)$$

Выражение

$$K=\frac{1}{R_1R_2} \qquad (65)$$

называется *гауссовой кривизной поверхности* в заданной точке, а выражение

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (66)$$

называется *средней кривизной*. Из квадратного уравнения (64) получаем непосредственно выражение гауссовой и средней кривизны через коэффициенты первой и второй формы Гаусса:

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \qquad H=\frac{EN-2FM+GL}{2(EG-F^2)}. \qquad (67)$$

Перепишем уравнения (62) и (63) в виде

$$(Ldu+Mdv)R=Edu+Fdv, \qquad (Mdu+Ndv)R=Fdu+Gdv.$$

Разделив почленно одно на другое, мы исключим букву R и после элементарных преобразований получим уравнение

$$(EM-FL)du^2+(EN-GL)du\,dv+(FN-GM)dv^2=0. \qquad (68)$$

Деля его на du^2, будем иметь квадратное уравнение относительно $\frac{dv}{du}$. Его два корня дадут нам величины, характеризующие главные направления в каждой точке поверхности:

$$\frac{dv}{du}=\varphi_1(u, v), \ \frac{dv}{du}=\varphi_2(u, v). \qquad (69)$$