147. Линии кривизны. *Линией кривизны на поверхности* называется такая линия на поверхности, у которой в каждой ее точке касательная направлена по главному направлению. Так как в каждой точке поверхности имеются два главных направления, то мы будем иметь два семейства линий кривизны на поверхности, и эти семейства будут взаимно ортогональны. Таким образом совокупность всех линий кривизны даст некоторую ортогональную сетку на поверхности. Уравнение (68) или эквивалентные ему уравнения (69) суть дифференциальные уравнения линий кривизны. Интегрируя их, мы выразим v через u

и, подставляя это выражение в уравнения поверхности, получим уравнения линий кривизны.

Пусть нам дана некоторая координатная сетка на поверхности. Выясним условия, при которых эта сетка есть сетка линий кривизны. Прежде всего, раз эта сетка должна быть сеткой линий кривизны, то она должна быть ортогональной сеткой, т. е. мы должны иметь $F=0$. Кроме того, раз координатные линии $u=C_1$ и $v=C_2$ суть линии кривизны, то уравнение (68) должно удовлетворяться при подстановке вместо u или v постоянной. Принимая во внимание уже полученный результат $F=0$, будем иметь $GM=0$ и $EM=0$. Но мы видели, что разность $EG-F^2$ положительна и, следовательно, величины E и G не могут быть равны нулю, и из двух предыдущих формул вытекает $M=0$. Итак, необходимым условием того, что координатная сетка была сеткой линий кривизны, является условие $F=M=0$. Наоборот, если это условие выполнено, то дифференциальное уравнение линий кривизны (68) имеет решение $u=C_1$ и $v=C_2$, т. е. координатные линии суть линии кривизны, и мы получаем следующую теорему: *необходимое и достаточное условие того, чтобы координатная сетка была сеткой линий кривизны, заключается в том, что в двух дифференциальных формах Гаусса средние коэффициенты на всей поверхности равны нулю*, т. е. $F=M=0$.

Можно определить линии кривизны и иначе, чем мы это сделали выше. Рассмотрим на поверхности некоторую линию (L). Нормали к поверхности вдоль этой линии образуют семейство прямых с одним параметром, определяющим положение точки на (L), и это семейство не будет иметь огибающей, ибо вообще семейство прямых в пространстве, зависящее от одного параметра, не имеет огибающей [152], т. е. не является семейством касательных к некоторой линии в пространстве. Но если выбрать (L) определенным образом, то огибающая нормалей будет существовать. Выясним условия, при которых это имеет место.

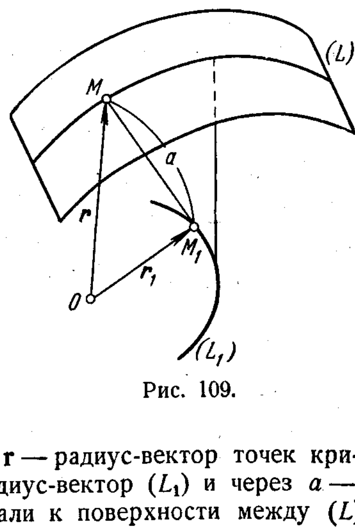

Рис. 109.

Положим, что линия (L) на поверхности выбрана так, что огибающая (L_1) нормалей к поверхности вдоль линии (L) существует (рис. 109). Обозначая через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек кривой (L), через $\mathbf{r}_1$ — соответствующий радиус-вектор (L_1) и через a — алгебраическую величину отрезка нормали к поверхности между (L) и (L_1), мы можем, очевидно, написать

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + a\mathbf{m}, \tag{70}$$

где, как всегда, $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали поверхности. Раз кривая (L_1) есть огибающая нормалей, то вектор $d\mathbf{r}_1$, направленный по касательной к ней, должен быть параллелен вектору $\mathbf{m}$, и мы можем написать $d\mathbf{r}_1 = b\mathbf{m}$, где b есть некоторый скаляр. Дифференцируя формулу (70), получим

$$b\mathbf{m} = d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} + da\,\mathbf{m}, \quad \text{то есть} \quad d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} = c\mathbf{m}, \tag{71}$$

где c — некоторый скаляр. Покажем, что $c = 0$. Для этого умножим обе части (71) скалярно на $\mathbf{m}$:

$$d\mathbf{r}\cdot\mathbf{m} + a\,d\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = c.$$

Вектор $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к (L), т. е. перпендикулярно к $\mathbf{m}$, и, следовательно, $d\mathbf{r}\cdot\mathbf{m} = 0$. Кроме того, из равенства $\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1$, как всегда, вытекает $d\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 0$ и, следовательно, предыдущее равенство действительно дает $c = 0$, и (71) может быть переписано в виде

$$d\mathbf{r} + a\,d\mathbf{m} = 0. \tag{72}$$

Эта формула обычно называется *формулой Родрига.* Мы вывели эту формулу из предположения, что нормали поверхности вдоль (L) имеют огибающую. Положим теперь, наоборот, что вдоль некоторой линии (L) на поверхности имеет место формула (72). При этом формула (70) определит некоторую кривую (L_1). Дифференцируя эту формулу и принимая во внимание (72), получим: $d\mathbf{r}_1 = da\,\mathbf{m}$, т. е. направления вектора $\mathbf{m}$ и касательной к (L_1) параллельны. Иными словами, нормаль к поверхности вдоль (L) касается (L_1). Итак, формула (72) дает необходимое и достаточное условие существования огибающей у нормалей к поверхности вдоль (L). Заметим, что огибающая может выродиться в точку, и тогда нормали образуют коническую (или цилиндрическую) поверхность, причем условие (72), как можно показать, также должно быть выполнено.

Напишем (72) в раскрытом виде

$$\mathbf{r}'_u\,du + \mathbf{r}'_v\,dv + a(\mathbf{m}'_u\,du + \mathbf{m}'_v\,dv) = 0$$

и умножим скалярно на $\mathbf{r}'_u$. В силу формул (42_1), (47) и (49), получим

$$E\,du + F\,dv + a(-L\,du - M\,dv) = 0,$$

а это есть как раз равенство (62) при $a = R$. Совершенно так же умножая скалярно на $\mathbf{r}'_v$, получим равенство (63). Нетрудно показать и наоборот, что из равенств (62) и (63), которые определяют главные радиусы кривизны и главные направления, получается формула (72) при $a = R$. На этом мы не останавливаемся. Таким образом условие существования огибающей нормалей (72) равносильно (62) и (63), причем a есть величина одного из главных радиусов кривизны. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующим результатам: *линии кривизны поверхности характеризуются тем свойством, что* *вдоль них нормали к поверхности имеют огибающую (или дают конус или цилиндр), причем величина отрезка нормали между поверхностью и огибающей равна одному из главных радиусов кривизны.*

Если некоторая плоская кривая вращается вокруг оси, лежащей в ее плоскости, то линиями кривизны полученной поверхности вращения будут ее меридианы и параллели. Действительно, вдоль меридианов нормали к поверхности образуют плоскость, а вдоль параллелей — конус.