148. Теорема Дюпена. Пусть в пространстве имеются три семейства взаимно перпендикулярных поверхностей

$$\varphi(x, y, z) = q_1, \quad \psi(x, y, z) = q_2, \quad \omega(x, y, z) = q_3.$$

Они образуют сетку ортогональных криволинейных координат в пространстве [**131**]. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ из начала в переменную точку пространства M характеризуется криволинейными координатами q_1, q_2, q_3 этой точки. Частные производные $\mathbf{r}'_{q_1}$, $\mathbf{r}'_{q_2}$ и $\mathbf{r}'_{q_3}$ дают векторы, направленные по касательным к координатным линиям, и условия ортогональности координат можно написать в векторной форме

$$\mathbf{r}'_{q_2} \cdot \mathbf{r}'_{q_3} = 0, \quad \mathbf{r}'_{q_3} \cdot \mathbf{r}'_{q_1} = 0, \quad \mathbf{r}'_{q_1} \cdot \mathbf{r}'_{q_2} = 0. \tag{73}$$

Дифференцируем первое из этих равенств по q_1, второе по q_2 и третье по q_3:

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}''_{q_1 q_2} \cdot \mathbf{r}'_{q_3} + \mathbf{r}'_{q_2} \cdot \mathbf{r}''_{q_1 q_3} = 0, \\
\mathbf{r}''_{q_2 q_3} \cdot \mathbf{r}'_{q_1} + \mathbf{r}'_{q_3} \cdot \mathbf{r}''_{q_1 q_2} = 0, \\
\mathbf{r}''_{q_1 q_3} \cdot \mathbf{r}'_{q_2} + \mathbf{r}'_{q_1} \cdot \mathbf{r}''_{q_2 q_3} = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\mathbf{r}''_{q_1 q_2} \cdot \mathbf{r}'_{q_3} = \mathbf{r}''_{q_2 q_3} \cdot \mathbf{r}'_{q_1} = \mathbf{r}''_{q_3 q_1} \cdot \mathbf{r}'_{q_2} = 0.$$

Сопоставим три равенства

$$\mathbf{r}'_{q_1} \cdot \mathbf{r}'_{q_3} = \mathbf{r}'_{q_2} \cdot \mathbf{r}'_{q_3} = \mathbf{r}''_{q_1 q_2} \cdot \mathbf{r}'_{q_3} = 0.$$

Из них следует, что векторы $\mathbf{r}'_{q_1}$, $\mathbf{r}'_{q_2}$ и $\mathbf{r}''_{q_1 q_2}$ перпендикулярны к одному и тому же вектору $\mathbf{r}'_{q_3}$ и, следовательно, компланарны, откуда следует, что [**117**]

$$\mathbf{r}''_{q_1 q_2} \cdot (\mathbf{r}'_{q_1} \times \mathbf{r}'_{q_2}) = 0. \tag{74}$$

Рассмотрим теперь координатную поверхность $q_3 = C$. На ней параметры q_1 и q_2 являются координатными параметрами, и координатные линии $q_1 = C$ и $q_2 = C$ суть линии пересечения взятой поверхности с двумя другими координатными поверхностями наших ортогональных координат в пространстве. Мы имели следующие формулы:

$$F = \mathbf{r}'_{q_1} \cdot \mathbf{r}'_{q_2}, \qquad M = \frac{\mathbf{r}''_{q_1 q_2} \cdot (\mathbf{r}'_{q_1} \times \mathbf{r}'_{q_2})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

и равенства (73) и (74) показывают, что в данном случае $F = M = 0$, т. е. координатные линии q_1 и q_2 суть линии кривизны на поверхности $q_3 = \text{const}$. Это приводит нас к следующей теореме Дюпена: *если в пространстве имеются три семейства взаимно ортогональных поверхностей, то любые две поверхности из разных семейств пересекаются по линии, которая является линией кривизны для обеих этих поверхностей.*