149. Примеры. 1. Уравнение сжатого эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>c^2)$$

может быть написано в параметрической форме в следующем виде:

$$x=a\cos u\sin v, \qquad y=a\sin u\sin v, \qquad z=c\cos v.$$

Координатные линии $u=c_1$ суть, очевидно, линии пересечения эллипсоида с плоскостями $y=x\operatorname{tg}c_1$, проходящими через ось вращения, т. е. суть меридианы, а координатные линии $v=c_2$ — параллели, получаемые от пересечения эллипсоида плоскостями $z=c\cos c_2$, перпендикулярными оси вращения. Применяя формулы (42) и (50) и принимая во внимание, что x, y и z суть составляющие вектора $\mathbf{r}$, получим

$$E=a^2\sin^2 v, \qquad F=0, \qquad G=a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v,$$
$$L=\frac{ac\sin^2 v}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}}, \qquad M=0, \qquad N=\frac{ac}{\sqrt{a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v}}.$$

Равенства $F=M=0$ можно было предвидеть в силу того, что меридианы и параллели суть линии кривизны эллипсоида вращения. Остальные коэффициенты зависят только от параметра v, характеризующего положение точки на меридиане. Главные направления совпадают, очевидно, с касательными к меридиану и параллели. Выражение $(LN-M^2)$ в данном случае положительно на всей поверхности, т. е. все точки поверхности — эллиптические. Не вычисляя в отдельности главные радиусы кривизны, приведем лишь выражение гауссовой кривизны:

$$K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{c^2}{(a^2\cos^2 v+c^2\sin^2 v)^2}.$$

2. Уравнение конуса второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

перепишем в явной форме

$$z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

Непосредственно дифференцируя, нетрудно получить:

$$p=\frac{c^2x}{a^2z}, \qquad q=\frac{c^2y}{b^2z}, \qquad r=\frac{c^4y^2}{a^2b^2z^3}, \qquad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \qquad t=\frac{c^4x^2}{a^2b^2z^3}.$$

Пользуясь формулами (53), можно определить все коэффициенты форм Гаусса. Отметим лишь, что в данном случае $rt-s^2=0$, т. е. все точки поверхности суть параболические точки, и один из главных радиусов кривизны равен бесконечности. Соответствующее главное направление совпадет, очевидно, с прямолинейной образующей конуса.

3. Рассмотрим гиперболический параболоид

$$z=\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}.$$

В данном случае $r=\frac{1}{a^2}$, $s=0$ и $t=-\frac{1}{b^2}$, так что $rt-s^2<0$, и, следовательно, всякая точка поверхности является гиперболической точкой. Две прямолинейные образующие поверхности дают в данном случае направление асимптот индикатрисы Дюпена, которая состоит из двух сопряженных гипербол. Аналогичное обстоятельство мы будем иметь и для однополого гиперболоида.

4. Обычные прямолинейные координаты, а также сферические и цилиндрические координаты дают простейшие примеры ортогональных координат в пространстве. Укажем еще один пример таких координат. Рассмотрим уравнение поверхности второго порядка, содержащее параметр ρ:

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0, \tag{75}$$

где $a^2>b^2>c^2$. Фиксируя точку $M(x, y, z)$ и освобождаясь от знаменателей, мы будем иметь уравнение третьей степени относительно ρ. Нетрудно показать, что это уравнение имеет три вещественных корня u, v и w, которые заключаются соответственно в границах

$$+\infty>u>-c^2, \quad -c^2>v>-b^2, \quad -b^2>w>-a^2. \tag{76}$$

Действительно, при больших положительных значениях ρ левая часть уравнения (75) близка к (-1) и имеет знак $(-)$, а при значениях ρ, немного больших $(-c^2)$, слагаемое $\frac{z^2}{c^2+\rho^2}$ есть большая положительная величина, и левая часть уравнения (75) имеет знак $(+)$. Таким образом внутри промежутка $(-c^2, \infty)$ должно существовать такое значение ρ, при котором левая часть уравнения (75) обращается в нуль. Аналогичным образом можно убедиться в существовании корней внутри промежутков $(-b^2, -c^2)$ и $(-a^2, -b^2)$. Три числа (u, v, w) называются *эллиптическими координатами* взятой точки $M(x, y, z)$. В нашем рассуждении предполагается, что все три координаты точки (x, y, z) отличны от нуля. В противном случае для ρ получится уравнение ниже третьей степени. Если, например, $z=0$, а x и y отличны от нуля, то уравнение (75) даст u и v, а w надо считать равным $(-c^2)$.

Исследуем теперь координатные поверхности в эллиптической системе координат. Подставляя в уравнение (75) $\rho=u$, где u — некоторое число из промежутка $(-c^2, \infty)$, получим поверхность

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1, \tag{77}$$

которая очевидно является эллипсоидом, так как, в силу первого из неравенств (76), все три знаменателя в уравнении (77) положительны. Полагая $\rho=v$, где v — из промежутка $(-b^2, -c^2)$, получим однополый гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{y^2}{b^2+v}+\frac{z^2}{c^2+v}=1, \tag{78}$$

так как в данном случае $a^2+v>b^2+v>0$ и $c^2+v<0$. Наконец, при $\rho=w$, где w — из промежутка $(-a^2, -b^2)$, получим двуполый гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2+w}+\frac{y^2}{b^2+w}+\frac{z^2}{c^2+w}=1. \tag{79}$$

Покажем, что полученные три координатные поверхности взаимно ортогональны. Вычитая почленно уравнения (77) и (78), получим

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=0. \tag{80}$$

Направляющие косинусы нормалей к поверхностям (77) и (78) соответственно пропорциональны [I, 160]:

$$\frac{x}{a^2+u},\quad \frac{y}{b^2+u},\quad \frac{z}{c^2+u} \text{ и } \frac{x}{a^2+v},\quad \frac{y}{b^2+v},\quad \frac{z}{c^2+v},$$

и равенство (80) выражает условие перпендикулярности этих нормалей, т. е. дает доказательство ортогональности поверхностей (77) и (78). Точно так же можно доказать взаимную ортогональность и других координатных поверхностей. Пользуясь теоремой Дюпена, мы можем утверждать, что *два семейства линий кривизны на эллипсоиде* (77) *(при фиксированном u) получатся в результате пересечения этого эллипсоида со всевозможными гиперболоидами из семейств* (78) *и* (79).