150. Гауссова кривизна. Выясним геометрический смысл понятия о гауссовой кривизне. Примем за координатные линии на поверхности — линии кривизны этой поверхности. Вдоль каждой из этих линий будет выполнено соотношение (72), причем коэффициент a есть, как мы видели, один из главных радиусов кривизны. Это дает нам следующие соотношения:

$$\mathbf{r}'_u + R_1\mathbf{m}'_u = 0, \quad \mathbf{r}'_v + R_2\mathbf{m}'_v = 0. \tag{81}$$

Сопоставим всякой точке M поверхности — точку M_0 сферы единичного радиуса, которая получается в пересечении этой сферы с вектором $\mathbf{m}$, отложенным из центра сферы, причем $\mathbf{m}$ есть единичный вектор нормали к поверхности в точке M. Такое точечное соответствие между точками поверхности и точками сферы называется обычно *сферическим отображением поверхности.* Положение точки M_0 будем характеризовать теми же параметрами u и v, что и положение M. Ввиду того, что координатные линии суть линии кривизны, будем иметь

$$E = \mathbf{r}'^2_u, \quad F = 0, \quad G = \mathbf{r}'^2_v. \tag{82}$$

Радиус-вектор сферического изображения M_0 есть по определению $\mathbf{m}$, и, в силу формул (81) и (82), коэффициенты первой формы Гаусса для сферического изображения будут:

$$E_0 = \mathbf{m}'^2_u = \frac{1}{R_1^2}E, \quad F_0 = \mathbf{m}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = 0, \quad G_0 = \mathbf{m}'^2_v = \frac{1}{R_2^2}G. \tag{83}$$

Остановимся лишь на доказательстве среднего из равенств, ибо остальные два непосредственно вытекают из (81) и (82). Формулы (49) дают $M = -\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = -\mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u$. Раз мы приняли за координатные линии линии кривизны, то $M = 0$, т. е. $\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = \mathbf{r}'_v \cdot \mathbf{m}'_u = 0$. Умножая первое из равенств (81) на $\mathbf{m}'_v$ или второе на $\mathbf{m}'_u$, получим $\mathbf{m}'_u \cdot \mathbf{m}'_v = 0$.

Элемент площади самой поверхности и соответствующий элемент сферического изображения будут

$$dS = \sqrt{EG}\,du\,dv, \qquad dS_0 = \sqrt{E_0G_0}\,du\,dv,$$

или, в силу (83),

$$dS_0 = \frac{1}{|R_1R_2|}\,dS,$$

откуда видно, что *гауссова кривизна в точке M по абсолютной величине есть предел отношения площади сферического отображения к соответствующей площади самой поверхности, когда эта последняя беспредельно сжимается к точке* M. Упомянутое отношение характеризует, очевидно, степень разбросанности пучка нормалей к поверхности в точках элемента dS.

В [**146**] мы вывели выражение гауссовой кривизны K через коэффициенты двух форм Гаусса. Самим Гауссом было дано выражение K только через коэффициенты E, F и G и их производные по u и v. Из этого обстоятельства вытекает одно важное следствие, на котором мы остановимся. Пусть между двумя поверхностями (S) и (S_1) установлено точечное соответствие, причем соответствующие точки характеризуются одинаковыми значениями параметров u и v. Каждая из поверхностей будет иметь свою первую форму Гаусса, выражающую квадрат элемента длины. Тождественность этих двух форм равносильна тому, что при упомянутом точечном соответствии длины сохраняются, или, иначе говоря, *поверхности наложимы друг на друга*. При этом коэффициенты E, F и G и их производные по u и v будут для обеих поверхностей одни и те же, а потому и кривизна K в соответствующих точках обеих поверхностей будет иметь одно и то же значение, т. е. *при отображении друг на друга двух поверхностей, сохраняющем длину, гауссова кривизна в соответствующих точках обеих поверхностей имеет одно и то же значение.*

В частности на плоскости гауссова кривизна равна нулю, и у поверхностей, которые могут быть наложены на плоскость без искажения длин, должно быть $LN - M^2 = 0$, т. е. все точки — параболические. В предыдущем мы имели пример таких поверхностей, а именно — конус и цилиндр.