151. Вариация элемента площади и средняя кривизна. Пусть (S) — некоторая поверхность, (u, v) — ее координатные параметры и $\mathbf{r}(u, v)$ — ее радиус-вектор. Откладывая в каждой точке $M(u, v)$ поверхности по нормали $\mathbf{m}$ отрезок MM_1 алгебраической величины $n(u, v)$, где $n(u, v)$ — некоторая функция u и v, получим новую поверхность (S_1), образованную точками M_1. Точки M_1 мы будем характеризовать теми же параметрами (u, v), что и точки M, и будем говорить, что между точками (S) и (S_1) установлено соответствие по нормалям к (S). Радиус-вектор $\mathbf{r}^{(1)}(u, v)$ поверхности (S_1) по определению будет: $\mathbf{r}^{(1)}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + n(u, v)\,\mathbf{m}(u, v)$. Дифференцируя по u и v, получим:

$$\mathbf{r}_u^{(1)\prime} = \mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u, \qquad \mathbf{r}_v^{(1)\prime} = \mathbf{r}'_v + n'_v\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_v.$$

Вычислим коэффициенты E_1, F_1, G_1 первой формы Гаусса для поверхности (S_1), причем будем считать длину n и ее производные по u и v — малыми и будем пренебрегать членами второго измерения относительно этих величин

$$E_1 = (\mathbf{r}_u^{(1)\prime})^2 = (\mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u)\cdot(\mathbf{r}'_u + n'_u\mathbf{m} + n\mathbf{m}'_u) =$$
$$= \mathbf{r}_u'^2 + 2n'_u(\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}) + 2n(\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_u).$$

Векторы $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{m}$ взаимно перпендикулярны и $\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m} = 0$, и формула (47) дает $E_1 = E - 2nL$. Точно так же нетрудно получить $F_1 = F - 2nM$ и $G_1 = G - 2nN$. Отсюда

$$E_1G_1 - F_1^2 = EG - F^2 - 2n(EN - 2FM + GL),$$

или, в силу (67),

$$E_1G_1 - F_1^2 = (EG - F^2)(1 - 4nH).$$

Извлекая корень, разлагая $(1 - 4nH)^{1/2}$ по биному Ньютона и откидывая члены со степенями n выше первой, будем иметь:

$$\sqrt{E_1G_1 - F_1^2} = \sqrt{EG - F^2}\,(1 - 2nH). \tag{84}$$

Умножая на $du\,dv$ и интегрируя, получим с точностью до малых величин второго порядка выражение разности δS площадей близких поверхностей (S) и (S_1):

$$\iint\limits_{(S_1)}\sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\,du\,dv - \iint\limits_{(S)}\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv =$$
$$= -\iint\limits_{(S)} 2nH\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{85}$$

или

$$\delta S = -\iint\limits_{(S)} 2nH\,dS.$$

В непосредственной связи с этой формулой находится известная *задача Плато об определении поверхности с наименьшей площадью, натянутой на заданный контур* (L). Нетрудно видеть, что *на* *такой поверхности средняя кривизна H должна быть равна нулю.* Действительно, если бы на некотором участке (σ) такой поверхности величина H оказалась, например, положительной, то, выбирая малую величину n также положительной на σ и равной нулю на остальной части поверхности и в частности на (L), мы получили бы, в силу (85), для δS отрицательное значение

$$\delta S = -\iint_{(\sigma)} 2nH\,dS,$$

и поверхность (S_1), проходя через (L), имела бы площадь, меньшую, чем (S), что противоречит предположению. В силу указанного обстоятельства поверхности со средней кривизной, равной нулю, называются *минимальными поверхностями.*

Из формулы (84) вытекает также формула дифференцирования интеграла по переменной замкнутой поверхности по параметру. Допустим, что положение некоторой переменной замкнутой поверхности определяется значением параметра λ и что при $\lambda = \lambda_0$ поверхность занимает положение (S), а при λ, близких к λ_0, — положение (S_1), близкое к (S). Установим между точками M поверхности (S) и точками M_1 поверхности (S_1) соответствие по нормалям, как это описано выше. При этом n будет функцией u, v и λ, которая обращается тождественно относительно u и v в нуль при $\lambda = \lambda_0$, т. е.

$$n(u,\ v,\ \lambda_0) \equiv 0. \tag{86}$$

Пусть далее $f(N)$ — некоторая функция точки в пространстве, не зависящая от параметра λ. Величина интеграла

$$I(\lambda) = \iint_{(S_1)} f(M_1)\,dS_1 \tag{87}$$

будет зависеть от параметра λ, так как от этого параметра зависит вид поверхности. Найдем выражение для производной $I'(\lambda_0)$. Умножая обе части (84) на $du\,dv$, можем написать $dS_1 = (1 - 2nH)\,dS$, и выражение (87) перепишется так:

$$I(\lambda) = \iint_{(S)} f(M_1)\,dS - \iint_{(S)} f(M_1)\,2nH\,dS.$$

При этом область интегрирования — исходная поверхность (S) — уже не зависит от λ, и мы можем применить обычное правило дифференцирования под знаком интеграла [**83**]. Точка M_1 лежит на поверхности (S_1), и пусть M — соответствующая ей точка на поверхности (S), так что отрезок $\overline{MM_1} = n(u,\ v)$ нормален к (S), т. е. имеет направление $\mathbf{m}$. Множитель $f(M_1)$ при дифференцировании по λ при $\lambda = \lambda_0$ даст

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\overline{MM_1}} \cdot \frac{\overline{MM_1}}{\lambda - \lambda_0} = \frac{\partial f(M)}{\partial m} \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda = \lambda_0},$$

где m — направление нормали $\mathbf{m}$. Принимая во внимание, что множитель n обращается в нуль при $\lambda=\lambda_0$ и обозначая через $\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}$ значение производной при $\lambda=\lambda_0$, получим

$$I'(\lambda_0)=\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f(M)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}\,dS-\iint\limits_{(S)}f(M)\,2H\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}\,dS. \tag{88}$$

Пусть уравнение переменной поверхности (S_1) написано в неявной форме

$$\varphi(M_1;\ \lambda)=0 \quad \text{или} \quad \varphi(x,\ y,\ z,\ \lambda)=0. \tag{89}$$

Дифференцируя по λ как непосредственно, так и через посредство M_1, так же, как это мы делали с функцией $f(M_1)$, получим при $\lambda=\lambda_0$

$$\frac{\partial\varphi(M_1,\ \lambda_0)}{\partial\lambda_0}+\frac{\partial\varphi(M_1,\ \lambda_0)}{\partial m}\cdot\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}=0.$$

Определяя отсюда $\frac{\partial n}{\partial\lambda_0}$ и подставляя в формулу (88), получим следующее выражение для производной:

$$I'(\lambda_0)=-\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f}{\partial m}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}\,dS+2\iint\limits_{(S)}fH\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_0}}{\frac{\partial\varphi}{\partial m}}\,dS. \tag{90}$$

Если в интеграле (87) и подынтегральная функция f содержит параметр λ, то так же, как и в [**132**], к правой части (90) надо добавить слагаемое вида

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\partial f}{\partial\lambda_0}\,dS.$$