152. Огибающая семейства поверхностей и кривых. В [13] при исследовании особых решений обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка мы ввели понятие об огибающей семейства плоских кривых. Точно так же исследование решений уравнений с частными производными приводит к понятию *огибающей* семейства поверхностей. Выясним в кратких чертах это понятие.

Пусть имеется семейство поверхностей с одним параметром

$$F(x, y, z, a) = 0. \tag{91}$$

Фиксируя численное значение a, получим определенную поверхность семейства. Рассмотрим новую поверхность (S), которая имеет то же уравнение (91), но с переменным a, получаемым из уравнения

$$\frac{\partial F(x, y, z, a)}{\partial a} = 0. \tag{92}$$

Можно сказать, что уравнение (S) получится исключением a из уравнений (91) и (92). Если фиксировать значение $a=a_0$, то, с одной стороны, получится определенная поверхность (S_0) из семейства (91), а с другой стороны, подставляя $a=a_0$ в уравнения (91) и (92), получим некоторую линию (l_0) на поверхности (S), так что поверхности (S) и (S_0) будут иметь общую линию (l_0). Покажем, что они будут иметь общую касательную плоскость вдоль (l_0).

Для поверхности (91), в силу постоянства a, проекции dx, dy, dz бесконечно малого перемещения вдоль поверхности должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0.$$

На поверхности (S) a — переменно, и мы должны написать

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial a}da=0.$$

Но в силу (92) это соотношение совпадает с предыдущим, т. е. на (S_0) и (S) в общих точках бесконечно малое перемещение перпендикулярно к одному и тому же направлению, у которого направляющие косинусы пропорциональны:

$$\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z},$$

откуда и следует, что (S_0) и (S) касаются вдоль (l_0). Таким образом *исключая a из уравнений* (91) *и* (92), *получим*, вообще говоря, *уравнение огибающей поверхности семейства* (91), *причем касание имеет место вдоль некоторой линии.*

Пример. Пусть имеется семейство сфер с центром на оси OZ и данным радиусом r

$$x^2+y^2+(z-a)^2=r^2.$$

Дифференцируем по a:

$$-2(z-a)=0.$$

Исключая a, получим уравнение кругового цилиндра

$$x^2+y^2=r^2,$$

который касается каждой из вышеуказанных сфер вдоль окружности.

Рассмотрим теперь семейство поверхностей, содержащее два параметра:

$$F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0. \tag{93}$$

Исключая a и b из написанного уравнения и уравнений

$$\frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ a,\ b)}{\partial b}=0, \tag{94}$$

получим, как нетрудно показать, поверхность (S), которая касается поверхностей семейства (93). Но в данном случае касание будет иметь место не вдоль линии, но лишь в некоторой точке. Действительно, фиксируя значения $a=a_0$ и $b=b_0$, мы, с одной стороны, получим определенную поверхность (S_0) из семейства (93), а с другой стороны, подставляя $a=a_0$ и $b=b_0$ в три уравнения (93) и (94), получим, вообще говоря, некоторую точку M_0 на поверхности (S). В этой точке, при соблюдении некоторых условий, (S) касается (S_0).

Пример. Пусть имеется семейство сфер с центром на плоскости XOY и заданным радиусом r:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=r^2.$$

Дифференцируем по a и b:

$$-2(x-a)=0, \quad -2(y-b)=0;$$

исключая a и b, получим уравнение $z^2=r^2$, т. е. огибающая будет состоять из двух параллельных плоскостей $z=\pm r$, которые касаются каждой из вышеуказанных сфер в некоторой точке.

По поводу нахождения огибающей семейства поверхностей можно сделать то же замечание, что и по поводу нахождения огибающей семейства кривых [**13**], а именно, например исключение a из уравнений (91) и (92) может привести не только к огибающей поверхности, но и к геометрическому месту особых точек поверхностей семейства (91), т. е. таких точек, в которых поверхность не имеет касательной плоскости. Если левая часть уравнения (91) есть непрерывная функция с непрерывными производными первого порядка, то всякая поверхность, которая во всех своих точках касается различных поверхностей семейства (91), может быть получена указанным выше приемом исключения a из уравнений (91) и (92). Вообще в этом и следующем параграфах мы не приводим доказательств и не уточняем условий, ограничиваясь приведением в общих чертах основных фактов.

Рассмотрим теперь семейство линий в пространстве, зависящее от одного параметра:

$$F_1(x, y, z, a)=0, \quad F_2(x, y, z, a)=0. \tag{95}$$

Будем искать огибающую этого семейства, т. е. такую линию Γ, которая во всех своих точках касается различных кривых семейства (95). Мы можем считать, что Γ также определяется уравнениями (95) [**13**], в которых только a есть не постоянная, но переменная. Проекции dx, dy, dz на оси бесконечно малого перемещения вдоль кривых (95) должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial z}dz=0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial z}dz=0.$$

Совершенно так же проекции δx, δy, δz бесконечно малого перемещения вдоль Γ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z+\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0.$$

Условия касания сводятся к пропорциональности этих проекций, т. е.

$$\frac{\delta x}{dx}=\frac{\delta y}{dy}=\frac{\delta z}{dz},$$

а эти условия, в силу предыдущих соотношений, равносильны двум уравнениям: $\frac{\partial F_1}{\partial a}\delta a=0$ и $\frac{\partial F_2}{\partial a}\delta a=0$, или, считая $\delta a\neq 0$, т. е. a — не постоянной, получим два уравнения

$$\frac{\partial F_1(x, y, z, a)}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial F_2(x, y, z, a)}{\partial a}=0. \tag{96}$$

Четыре уравнения (95) и (96) не определяют, вообще говоря, линии, т. е. *семейство линий в пространстве не имеет*, как правило, *огибающей*. Но если эти четыре уравнения сводятся к трем, т. е. одно из них есть следствие остальных, то из этих трех уравнений координаты (x, y, z) определяются как функции параметра a, т. е. мы получаем линию в пространстве, которая и будет огибающей [или геометрическим местом особых точек линий (95)]. В следующем номере мы будем иметь пример семейства прямых в пространстве, имеющих огибающую.