153. Развертывающиеся поверхности. В качестве частного случая рассмотрим семейство плоскостей с одним параметром a:

$$A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) = 0. \tag{97}$$

Огибающая поверхность (S) получится исключением a из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} A(a)x + B(a)y + C(a)z + D(a) = 0, \\ A'(a)x + B'(a)y + C'(a)z + D'(a) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

При фиксированном a эти два уравнения дают некоторую прямую (l_a), и поверхность (S) есть геометрическое место этих прямых, т. е. обязательно линейчатая поверхность. Дальше мы увидим, что не всякая линейчатая поверхность может быть получена указанным выше путем. Вдоль прямой (l_a) поверхность (S) касается плоскости (97), т. е. *вдоль прямолинейной образующей* (l_a) *поверхность* (S) *имеет одну и ту же касательную плоскость.* Таким образом на (S) семейство касательных плоскостей зависит только от одного параметра a, характеризующего образующую (l_a). В общем случае семейство касательных плоскостей к поверхности зависит от двух параметров, определяющих положение точки на поверхности. Пусть уравнение (S) написано в явной форме: $z=f(x, y)$, причем частные производные функции $f(x, y)$ мы будем обозначать так же, как в [65]. Первые два направляющих косинуса нормали будут функциями одного параметра a:

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_1(a),$$
$$\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}=W_2(a).$$

Исключая из этих уравнений a, получим связь между p и q, которую можем написать в виде

$$q=\varphi(p).$$

Соотношение это должно быть выполнено на всей поверхности (S) и, дифференцируя его по независимым переменным x и y, получим

$$s=\varphi'(p)\,r,$$
$$t=\varphi'(p)\,s,$$

откуда

$$rt-s^2=0, \tag{99}$$

т. е. *у поверхности, которая огибает семейство плоскостей с одним параметром, все точки должны быть параболическими.*

Поверхность (S) образована семейством прямых (98). Нетрудно видеть, что это семейство прямых имеет огибающую. Действительно, дифференцируя уравнения (98) по a, получаем два уравнения

$$\left.\begin{aligned} A'(a)\,x+B'(a)\,y+C'(a)\,z+D'(a)=0,\\ A''(a)\,x+B''(a)\,y+C''(a)\,z+D''(a)=0, \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

и четыре уравнения (98) и (100) сводятся к трем. Таким образом мы можем утверждать, что поверхность (S) образована касательными к некоторой пространственной кривой Г. Если эта кривая Г вырождается в точку, то (S) есть коническая поверхность, а если эта точка удаляется на бесконечность, то (S) есть цилиндрическая поверхность. Покажем, что и наоборот, если дана в пространстве кривая Γ,

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \\ z &= \omega(t), \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

то поверхность (S), *образованная касательными к кривой* Γ, *огибает семейство плоскостей с одним параметром, а именно семейство соприкасающихся для кривой* Γ *плоскостей.* Действительно, это семейство имеет уравнение

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{102}$$

где (x, y, z) определяются формулами (101) и A, B, C определяются формулами (31) из [**138**]. Дифференцируя (102) по параметру t и принимая во внимание, что в силу (31)

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \tag{103}$$

получим

$$dA(X-x)+dB(Y-y)+dC(Z-z)=0, \tag{104}$$

где вместо производных по t мы пишем дифференциалы. Огибающая поверхность семейства (102) состоит из прямых линий, определяемых уравнениями (102) и (104), и нам остается показать, что эти два уравнения определяют касательную к Γ в точке (x, y, z). Дифференцируя соотношение (103) и принимая во внимание, что, в силу (31), $A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0$, получим

$$dA\,dx+dB\,dy+dC\,dz=0. \tag{105}$$

Соотношения (103) и (105) показывают, что нормали к плоскостям (102) и (104), проходящим через точку (x, y, z), перпендикулярны к касательной к кривой Γ, т. е. плоскости (102) и (104) проходят обе через эту касательную, что нам и надо было доказать.

Выше мы видели, что условие (99) является необходимым условием того, что (S) есть огибающая семейства плоскостей с одним параметром. Можно показать, что оно и достаточно. Выше мы говорили также [**150**], что условие (99) (или ему равносильное $LN-M^2=0$) необходимо для того, чтобы (S) можно было отобразить на плоскость без искажения длин. Можно показать, что и наоборот, если это условие выполнено, то достаточно малый кусок поверхности можно отобразить указанным выше образом на плоскость. Поэтому огибающие семейства плоскостей с одним параметром называют *развертывающимися поверхностями.*

Не всякая линейчатая поверхность будет развертывающейся поверхностью. Например, если мы возьмем гиперболический параболоид или однополый гиперболоид, то для них соотношение (99) не выполнено [**149**], хотя они и являются линейчатыми поверхностями. Отсюда следует, что если переменная точка такой поверхности движется вдоль прямолинейной образующей, то соответствующая этой точке касательная плоскость вращается вокруг этой образующей.

Французский математик Лебег подробно исследовал поверхности, развертывающиеся на плоскость, при весьма малых предположениях о функциях, входящих в уравнения (38) таких поверхностей (мы предполагали наличие непрерывных производных до второго порядка). Он дал, между прочим, пример такой поверхности, причем эта поверхность есть нелинейчатая поверхность вращения.