

ТАБЛИЦА 30  
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{\sin^m px}{x^n} dx, \quad \int \frac{x^n dx}{\sin^m px}, \quad \int \frac{x^n \sin^r x}{(a+b \sin x)^m} dx;$$

$n=0, 1, 2, \dots, m=1, 2, 3, \dots, r=0, 1.$

30.1.\*  $\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots$

30.2.\*  $\int \frac{\sin px}{x^n} dx = -\frac{\sin px}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{p^{n-1}}{n-1} \int \frac{\cos t dt}{t^{n-1}}, \quad \text{где } t=px$   
 $(n \geq 2) \quad (\text{см. 33.2}).$

30.3.  $\int \frac{\sin^m px}{x^n} dx = -\frac{\sin^{m-1} px [(n-2) \sin px + mpx \cos px]}{(n-1)(n-2)x^{n-1}}$   
 $- \frac{m^2 p^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin^m px dx}{x^{n-2}} + \frac{m(m-1)p^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin^{m-2} px dx}{x^{n-2}} \quad (n \geq 3).$

30.4.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right|.$

30.5.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\ctg x.$

30.6.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tg \frac{x}{2} \right|.$

30.7.  $\int \frac{dx}{\sin^m px} = -\frac{\cos px}{(m-1)p \sin^{m-1} px} + \frac{n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} px} \quad (m \geq 2).$

30.8.\*  $\int \frac{x dx}{\sin x} = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7x^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31x^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127x^9}{3 \cdot 9 \cdot 9!} + \dots + \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \dots$

30.9.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \ctg x + \ln |\sin x|.$

30.10.\*  $\int \frac{x dx}{\sin^3 x} = -\frac{x \cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sin x} \quad (\text{см. 30.8}).$

30.11.  $\int \frac{x dx}{\sin^m px} = -\frac{x \cos px}{(m-1) \sin^{m-1} px} - \frac{1}{(m-1)(m-2)p \sin^{m-2} px} +$   
 $+ \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x dx}{\sin^{m-2} px} \quad (m \geq 3).$

30.12.  $\int \frac{x^n dx}{\sin^m px} =$   
 $= -\frac{x^{n-1}}{(m-1)(m-2)p^2 \sin^{m-1} px} [n \sin px + (m-2)p x \cos px] +$   
 $+ \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x^n dx}{\sin^{m-2} px} + \frac{n(n-1)}{(m-1)(m-2)p^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sin^{m-4} px} \quad (m \geq 3).$

30.13.  $\int \frac{dx}{1 \pm \sin x} = \mp \tg \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$

30.14.  $\int \frac{dx}{a+b \sin x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \arctg \frac{a \tg \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{при } a^2 > b^2 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a \tg \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tg \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right| & \text{при } a^2 < b^2. \end{cases}$

30.15.  $\int \frac{dx}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{2} \tg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{6} \tg^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$

30.16.  $\int \frac{dx}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{2} \ctg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \ctg^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$

30.17.  $\int \frac{bx}{(a+b \sin x)^2} = \frac{b \cos x}{(a^2-b^2)(a+b \sin x)} + \frac{a}{a^2-b^2} \int \frac{dx}{a+b \sin x} \quad (a^2 \neq b^2) \quad (\text{см. 30.14}).$

30.18.  $\int \frac{x dx}{1 \pm \sin x} = \mp x \tg \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \frac{\cos}{\sin} \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right) \right|.$

30.19.  $\int \frac{\sin x dx}{1 \pm \sin x} = \pm x + \tg \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$

30.20.  $\int \frac{\sin x dx}{a+b \sin x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+b \sin x} \quad (a^2 \neq b^2) \quad (\text{см. 30.14}).$

30.21.  $\int \frac{\sin x dx}{(1 \pm \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \tg \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \tg^3 \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$

30.22.  $\int \frac{\sin x ax dx}{(a+b \sin x)^2} = \frac{a \cos x}{(b^2-a^2)(a+b \sin x)} + \frac{b}{b^2-a^2} \int \frac{dx}{a+b \sin x} \quad (a^2 \neq b^2) \quad (\text{см. 30.14}).$