ТАБЛИЦА 49

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n}\operatorname{sh}^{\pm m} px\,dx;\quad \begin{matrix} n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \\ m=1,\ 2,\ 3,\ldots \end{matrix}$$

49.1. $\int \operatorname{sh} px\,dx=\frac{1}{p}\operatorname{ch} px.$

49.2 $\int \operatorname{sh}^2 px\,dx=\frac{\operatorname{sh} 2px}{4p}-\frac{x}{2}.$

49.3. $\int \operatorname{sh}^3 px\,dx=\frac{\operatorname{ch} px}{3p}(\operatorname{ch}^2 px-3).$

49.4. $\int \operatorname{sh}^4 px\,dx=\frac{1}{8p}\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 4px-2\operatorname{sh} 2px+3x\right).$

49.5 $\int \operatorname{sh}^m px\,dx=\frac{\operatorname{sh}^{m-1} px\operatorname{ch} px}{mp}-\frac{m-1}{m}\int \operatorname{sh}^{m-2} px\,dx.$

49.6. $\int x\operatorname{sh} px\,dx=\frac{x}{p}\operatorname{ch} px-\frac{1}{p^2}\operatorname{sh} px.$

49.7. $\int x\operatorname{sh}^2 px\,dx=\frac{x\operatorname{sh} 2px}{4p}-\frac{\operatorname{ch} 2px}{8p^2}-\frac{x^2}{4}.$

49.8. $\int x\operatorname{sh}^3 px\,dx=\frac{x\operatorname{ch} px}{3p}(\operatorname{ch}^2 px-3)-\frac{\operatorname{sh} px}{9p^2}(\operatorname{sh}^2 px-6).$

49.9. $\int x^2\operatorname{sh} px\,dx=\frac{p^2x^2+2}{p^3}\operatorname{ch} px-\frac{2x}{p^2}\operatorname{sh} px.$

49.10. $\int x^2\operatorname{sh}^2 px\,dx=\frac{(4p^2x^2+2)\operatorname{sh} 2px}{p^3}-\frac{4x}{p^2}\operatorname{ch} 2px-\frac{x^3}{6}.$

49.11. $\int x^2\operatorname{sh}^3 px\,dx=\frac{\operatorname{ch} px}{27p^3}(p^2x^2\operatorname{ch}^2 px-27p^2x^2-54)-$

$$-\frac{x\operatorname{sh} px}{9p^2}(\operatorname{sh}^2 px-12).$$

49.12 $\int x^3\operatorname{sh} px\,dx=\frac{p^3x^3+6x}{p^3}\operatorname{ch} px-\frac{3p^2x^2+6}{p^4}\operatorname{sh} px.$

49.13. $\int x^n\operatorname{sh} px\,dx=\frac{x^n}{p}\operatorname{ch} px-\frac{n}{p}\int x^{n-1}\operatorname{ch} px\,dx.$

49.14. $\int x^n\operatorname{sh}^2 px\,dx=\frac{x^n}{4p}\operatorname{sh} 2px-\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}-\frac{n}{2^{n+2}p^{n+1}}\int t^{n-1}\operatorname{sh} t\,dt,$

где $t=2px$ (см. 49.13).

49.15.* $\int \frac{\operatorname{sh} px}{x}dx=px+\frac{(px)^3}{3\cdot 3!}+\frac{(px)^5}{5\cdot 5!}+\frac{(px)^7}{7\cdot 7!}+\cdots$

49.16.* $\int \frac{\operatorname{sh} px}{x^2}dx=-\frac{\operatorname{sh} px}{x}+p\int \frac{\operatorname{ch} px}{x}dx$ (см. 50.15).

49.17.* $\int \frac{\operatorname{sh}^2 px\,dx}{x}=-\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{ch} pt}{t}dt,$ где $t=2x$ (см. 50.15).

49.18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} px}=\frac{1}{p}\ln\left|\operatorname{th}\frac{px}{2}\right|=-\frac{1}{2p}\ln\frac{\operatorname{ch} px+1}{\operatorname{ch} px-1}.$

49.19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 px}=-\frac{1}{p}\operatorname{cth} px.$

49.20. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 px}=-\frac{1}{p}\left(\frac{\operatorname{ch} px}{2\operatorname{sh}^2 px}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{th}\frac{px}{2}\right|\right).$

49.21. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^m px}=-\frac{\operatorname{ch} px}{(m-1)p\operatorname{sh}^{m-1} px}-\frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{m-2} px}$ $(m\geqslant 2).$

49.22*. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh} px}=\frac{1}{p^2}\left[px-\frac{(px)^3}{3\cdot 3!}+\frac{7(px)^5}{3\cdot 5\cdot 5!}-\frac{31(px)^7}{3\cdot 7\cdot 7!}+\cdots\right.$

$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!}B_n(px)^{2n+1}+\ldots\right]\quad (p^2x^2<\pi^2).$$

49.23. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2 px}=-\frac{1}{p^2}(px\operatorname{cth} px+\ln|\operatorname{sh} px|).$

49.24. $\int \operatorname{sh} px\operatorname{sh} qx\,dx=\frac{\operatorname{sh}(p+q)x}{2(p+q)}-\frac{\operatorname{sh}(p-q)x}{2(p-q)}$ $(p^2\neq q^2).$