МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. БРУСИН

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

MATRICES AND SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

V. A. BRUSIN

The paper is a continuation of the paper "Matrices as linear operators" and it is devoted to matrix apparatus application to linear system solutions. In particular, if no such precise solution exists, then a solution of location problems is given. If no such minimal location solution exists, then their innumerable set is given either.

Статья является продолжением статьи "Матрицы как линейные операторы" и посвящена применению матричного аппарата к решению систем линейных уравнений. В частности, дается решение проблем нахождения наилучшего приближенного решения, если точных решений не существует, и нахождения минимальных решений, если их бесчисленное множество.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ И РЕШЕНИЕ В НЕОСОБОМ СЛУЧАЕ

Будем рассматривать систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Если изначально имеется только одно или два уравнения, то недостающие уравнения можно приписать, повторив уже имеющиеся. Аналогично если имеются три уравнения, но только два неизвестных x_1 и x_2, то можно дополнить эти уравнения членами с неизвестным x_3 и нулевыми коэффициентами a_{i3}, приведя систему к виду (1).

Как известно [2, 3], решением системы (1) называется тройка чисел (x_1, x_2, x_3), которая после подстановки в систему (1) обращает каждое уравнение в тождество. Известно также, что система (1) может иметь единственное решение, бесчисленное множество решений или не иметь решений вообще. Ниже, используя матричный аппарат и интерпретацию матриц как операторов [1], мы дадим геометрическую трактовку этим трем случаям.

Введем в рассмотрение квадратную матрицу A, столбцы b и x:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Согласно правилам действий с матрицами [1, 2] (формула (8) из [1]), система (1) будет эквивалентна одному уравнению

$$Ax = b. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) считается столбец x (или трехмерный вектор $x \in \mathbf{R}^3$ с координатами x_1, x_2, x_3), удовлетворяющий данному равенству как равенству двух столбцов (или соответствующих векторов). Легко видеть, что если столбец x является решением уравнения (3), то набор (x_1, x_2, x_3) будет решением системы (1), и наоборот.

Пусть A – неособая матрица [1–3]. Значит, существует обратная матрица A^{-1} (формулы (6), (7) из [1]). Умножая на нее слева обе части равенства (3) и используя правила умножения матриц [1–3] (формулы (3)–(5) из [1]), а также факт, что $A^{-1}A = E$ – единичная матрица, получаем равенство

$$x = A^{-1}b. \tag{4}$$

Таким образом, в этом случае имеется единственное решение, которое можно найти по формуле (4). (Заметим, что, вычислив A^{-1} [1, 2], можно с помощью формулы (4) быстро находить решения для различных столбцов b.)

Больше сложностей возникает в случае, когда матрица A особая. К этому случаю, в частности, приводятся системы, у которых число уравнений не совпадает с числом неизвестных. Но именно такая ситуация наиболее часто встречается в прикладных задачах [4].

Чтобы разобраться во всех возникающих вариантах и дать им геометрическое истолкование, потребуются дополнительные сведения к тем, что приведены в [1].

2. ОСНОВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМЫЕ МАТРИЦЕЙ

Определение 1. Говорят, что *множество векторов образует линейное пространство* L, если удовлетворяются следующие условия:

а) для любых векторов $a, b \in L$

$$a + b \in L; \tag{5}$$

б) для любого вектора $a \in L$ и числа k

$$k \cdot a \in L. \tag{6}$$

Замечание. Для двумерных и трехмерных векторов указанные в (5), (6) действия определены в [1]. Определение 1 справедливо и для векторов (столбцов) произвольной размерности, для которых эти операции с указанными в [1] свойствами также могут быть определены [3, 5, 6].

Легко понять, что в качестве линейных пространств трехмерных векторов могут служить само трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$, множества радиусов-векторов, составляющих плоскости и прямые, и, наконец, начало координат.

Определение 2. *Аннулируемым пространством* $N(A)$ [6] матрицы A третьего порядка называется множество векторов-столбцов $x \in \mathbf{R}^3$, удовлетворяющих равенству

$$Ax = \theta, \tag{7}$$

где θ – нулевой вектор: $\theta = \mathrm{col}(0, 0, 0)$.

Используя материал из [1], можно сказать, что $N(A)$ – это множество всех тех точек пространства (или их радиусов-векторов), которые с помощью преобразования T_A переводятся в начало координат:

$$x \in N(A) \xrightarrow{T_A} \theta.$$

Нетрудно проверить, что $N(A)$ – это линейное пространство. В случае неособой матрицы $N(A)$ состоит из одной точки – начала координат.

Определение 3. *Областью значений* $R(A)$ или образом матрицы A третьего порядка [3, 6] называется множество тех векторов-столбцов y, которые можно получить после применения матрицы A, то есть

$$y = Ax, \qquad \exists x \in \mathbf{R}^3. \tag{8}$$

Переводя на язык преобразований [1], $R(A)$ – это множество точек (или радиусов-векторов), в которые переводятся точки пространства $\mathbf{R}^3$ преобразованием T_A:

$$x \in \mathbf{R}^3 \xrightarrow{T_A} y \in R(A).$$

Нетрудно проверить, что $R(A)$ – линейное пространство. Если A – неособая матрица, то $R(A) = \mathbf{R}^3$.

Определение 4 [6]. Говорят, что *пространство трехмерных векторов* $\mathbf{R}^3$ разлагается в ортогональную сумму $\mathbf{R}^3 = L_1 \oplus L_2$ линейных пространств L_1 и L_2, если:

1) любой ненулевой вектор из L_1 ортогонален (перпендикулярен) любому (ненулевому) вектору из L_2, то есть $L_1 \perp L_2$;

2) любой трехмерный вектор a можно единственным образом представить в виде суммы векторов из L_1 и L_2:

$$a = a_1 + a_2, \qquad \exists a_1 \in L_1, \qquad a_2 \in L_2.$$

Пример. Пусть L_1 – координатная плоскость. Тогда L_2 – перпендикулярная ей ось координат. В этом случае a_i $(i = 1, 2)$ – это вектор-проекции вектора a на координатную плоскость и ось координат соответственно. Если L_1 – любая плоскость, проходящая через начало координат, то L_2 будет прямая, проходящая через начало координат и ей перпендикулярная.

Определение 5 [2–6]. Матрица A^T называется *транспонированной к матрице* A, если ее строки (столбцы) являются столбцами (строками) матрицы A с одинаковыми номерами.

Лемма. *Для любой матрицы A имеет место*

$$\mathbf{R}^3 = R(A) \oplus N(A^T) = R(A^T) \oplus N(A). \tag{9}$$

Достаточно простое доказательство этой леммы приведено в приложении.

3. РАССМОТРЕНИЕ СИСТЕМЫ (1) В СЛУЧАЕ ОСОБОЙ МАТРИЦЫ A

Согласно изложенному выше, если матрица A особая (и ненулевая), то оператор T_A переводит все точки (радиусы-векторы) пространства в некоторую плоскость или прямую, проходящие через начало координат. Тогда для системы (1) (или уравнения (2)) возможны два варианта:

вариант I: $b \notin R(A)$;

вариант II: $b \in R(A)$.

В первом варианте система решений не имеет. В этом случае возникает задача о нахождении приближенного решения с наименьшей погрешностью – наилучшего приближенного решения (НПР). Во втором варианте система будет иметь бесчисленное множество решений. Здесь очень часто возникает задача об отыскании вектора-решения наименьшей длины [4]: минимального решения (МР). Рассмотрим решение этих задач в отдельности.

3.1. Нахождение наилучшего приближенного решения

Пусть x_1 – произвольно выбранный вектор-столбец, который мы хотим рассматривать как приближенное решение (ПР) уравнения (2). Тогда за меру погрешности такого ПР обычно принимают величину $|b - Ax_1|$, то есть длину вектора $b - Ax_1$ (рис. 1). Если $b \notin R(A)$, то эта величина больше нуля. Чем меньше эта величина, тем ПР считается точнее. Тогда наилучшим ПР (НПР) будет такой вектор-столбец $\hat{x}$, для которого величина $|Ax - b|$ будет наименьшей. Возникает задача нахождения такого вектора $\hat{x}$. Обозначим через $\hat{b}$ проекцию вектора b на плоскость $R(A)$ (см. рис. 1). Очевидно, что искомый вектор $\hat{x}$ должен удовлетворять равенству $A\hat{x} = \hat{b}$. Ибо только в этом случае $A\hat{x} - b \perp R(A)$ и, следовательно, величина $|A\hat{x} - b|$ принимает минимально возможное значение. Таким образом, НПР должно удовлетворять соотношению

$$A\hat{x} = \hat{b}, \qquad \hat{b} = np_{R(A)}b. \tag{10}$$

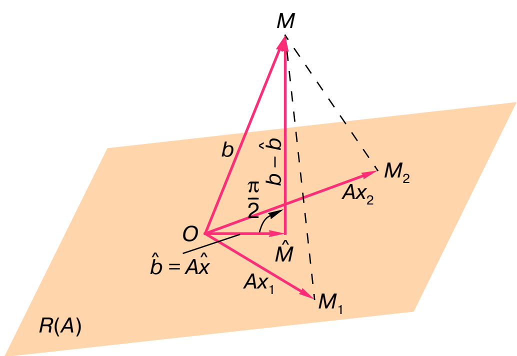

Рис. 1

Следующая теорема дает алгоритм для нахождения НПР.

Теорема 1. *Вектор-столбец $\hat{x}$ есть НПР в том и только том случае, если он удовлетворяет уравнению*

$$A^T A\hat{x} = A^T b, \tag{11}$$

или в другой форме – уравнению

$$A^T \hat{y} = A^T b, \qquad \hat{y} := A\hat{x}. \tag{12}$$

При этом вектор $\hat{y}$ определяется однозначно:

$$\hat{y} = \hat{b}. \tag{13}$$

Замечание. Система (12) может иметь бесчисленное множество решений, и вектор $\hat{x}$ определяется неоднозначно. Но вектор $\hat{y}$ и, значит, невязка $|A\hat{x} - b|$ будут вполне определенными.

Доказательство. 1) Пусть $\hat{x}$ удовлетворяет (10). Поскольку $\hat{b}$ – проекция вектора b на $R(A)$, то $\hat{b} \in R(A)$ и $\hat{b} \perp b - \hat{b}$ (см. рис. 1). Отсюда по лемме получаем $b - \hat{b} \in N(A^T)$. Это значит, что $A^T(b - \hat{b}) = 0$, то есть справедливо (11);

2) Наоборот, пусть $\hat{x}$ удовлетворяет уравнению (11). Тогда $\hat{y} = A\hat{x}$ будет удовлетворять равенству (12). Следует показать, что $\hat{y} = \hat{b}$ является проекцией вектора b на $R(A)$. По свойству проекций достаточно показать, что $\hat{y} \perp b - \hat{y}$ (см. рис. 1). Из (11), (12) следует, что $A^T(b - \hat{y}) = 0$, то есть $b - \hat{y} \in N(A^T)$. Но $\hat{y} \in R(A)$, значит, согласно опять-таки лемме, $\hat{y} \perp b - \hat{y}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, согласно теореме 1, для того чтобы найти НПР, нужно найти любое решение системы (11). Заметим, что эта система относится к варианту II.

Замечание. Схема нахождения НПР $\hat{x}$ является одновременно и схемой проверки соотношения $b \in R(A)$. Если решение системы (11) будет удовлетворять исходной системе, то, значит, это соотношение верно и в действительности мы получили не ПР, а точное решение. В противном случае имеет место $b \notin R(A)$. Данная схема является альтернативной к ранговому критерию теоремы Кронекера–Капелли [2, 3].

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ &-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ &3x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что эта система несовместна. Найдем ее НПР. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 14 & 6 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Система (11) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 14 & 6 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Исключая из первого и третьего уравнений $\hat{x}_1$, получим последовательно $9\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 = 1$, $\hat{x}_1 = 1 - 4\hat{x}_2$.

Полагая $\hat{x}_2 = t$ свободным параметром, записываем множество всех НПР в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4t \\ t \\ \frac{1}{3} - 3t \end{pmatrix}, \qquad t \in R^1.$$

Проекция вектора b на $R(A)$ вычисляется по формуле (12):

$$\hat{y} = \hat{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-4t \\ t \\ \frac{1}{3} - 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что этот вектор действительно вычисляется однозначно. Легко получить, что НПР минимальной длины получается при $t = \frac{11}{26}$.

3.2. Нахождение "минимального" решения

Пусть теперь $b \in R(A)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Минимальный по длине вектор-столбец x_0 решения уравнения* (2) (*MP*) *имеет вид*

$$x_0 = A^T z, \tag{14}$$

где z — любой вектор-столбец, удовлетворяющий уравнению

$$AA^T z = b. \tag{15}$$

Множество всех решений будет иметь вид

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad \Delta x \in N(A). \tag{16}$$

Замечание. Геометрически множество точек — концов радиусов-векторов x вида (16) представляет собой плоскость, перпендикулярную радиусу-вектору $x_0 \in R(A)$ и проходящему через его конец (рис. 2).

Доказательство теоремы 2. Пусть $x \in \mathbf{R}^3$ — произвольное решение системы. Согласно лемме, он может быть однозначно представлен в виде суммы (16), где $x_0 \in R(A^T)$, $\Delta x \in N(A)$, причем $x_0 \perp \Delta x$ (см. рис. 2). Вектор x_0 будет решением исходной системы, так как $Ax_0 = A(x - \Delta x) = Ax - A\Delta x = Ax = b$, $\Delta x \in N(A)$. В силу перпендикулярности (и теоремы Пифагора) имеем $|x|^2 = |x_0|^2 + |\Delta x|^2$ ($|a|$ — длина вектора a). Отсюда вытекает, что среди всех решений x_0 имеет минимальную длину (для него $|\Delta x| = 0$). То есть x_0 есть МР и любое другое решение имеет вид (16).

Теорема доказана.

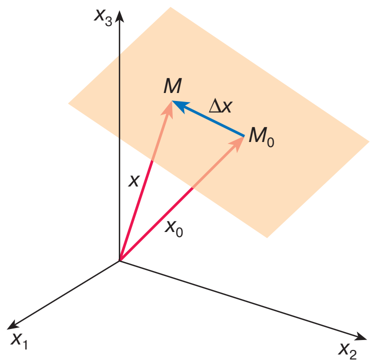

Рис. 2

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенная теория имеет прямое обобщение на n уравнений с n неизвестными, $n > 3$, что и представляет действительный интерес для приложений [4]. Идейная, геометрическая часть при этом остается той же самой — нужно только представить, что все действия происходят в n-мерном пространстве. Техническая часть теории, конечно, усложняется, но это усложнение в основном носит количественный характер: при вычислении длин векторов, произведений матриц и т.п. вместо трех слагаемых в соответствующих выражениях будут присутствовать n слагаемых, отвечающих новым размерностям. Более сложной по сравнению с трехмерными матрицами [1] будет процедура нахождения обратной матрицы A^{-1}. Но здесь помогает наличие стандартных компьютерных программ точного и приближенного (в случае очень больших размерностей) отыскания A^{-1}.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы основано на формуле [6]

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^T x, y\rangle \qquad \text{(I)}$$

для любых векторов $x, y \in R^n$ и матриц A n-го порядка, где через $\langle a, b\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов-столбцов $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$: $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. В случае трехмерных векторов ($n = 3$) известно, что два ненулевых вектора a и b перпендикулярны в том и только том случае, если $\langle a, b\rangle = 0$ [2–6] [1]. Формула (I) для $n = 3$ легко проверяется прямым вычислением левой и правой частей.

1. Пусть $x_1 \in R(A)$, $x_2 \in N(A^T)$– ненулевые трехмерные векторы из соответствующих пространств. По определению этих пространств,

$$x_1 = Az, \qquad \exists z \in \mathbf{R}^3; \qquad A^T x = \theta. \qquad \text{(II)}$$

Покажем, что отсюда следует $x_1 \perp x_2$. Вычислим скалярное произведение $\langle x_1, x_2\rangle$. Подставляя в него соотношения (II) и используя равенство (I), получаем $\langle x_1, x_2\rangle \overset{\text{(II)}}{=} \overset{\text{(II)}}{=} \langle Az, x_2\rangle \overset{\text{(I)}}{=} \langle z, A^T x_2\rangle \overset{\text{(II)}}{=} 0$. Таким образом, $x_1 \perp x_2$. Поскольку x_1 и x_2 – произвольные векторы пространств, отсюда следует $R(A) \perp N(A^T)$.

2. Покажем теперь, что любой вектор $\tilde{x}$, перпендикулярный $R(A)$, принадлежит $N(A^T)$. Пусть $\tilde{x} \perp R(A)$. Тогда $\langle \tilde{x}, Az\rangle = 0$ для любого $z \in \mathbf{R}^3$. Отсюда получаем $\langle \tilde{x}, Az\rangle \overset{\text{(I)}}{=} \langle A^T\tilde{x}, z\rangle = 0$. Но тогда $A^T\tilde{x}$ должен быть нулевым вектором, ибо в противном случае он должен быть перпендикулярным любому вектору $z \in \mathbf{R}^3$. Это и доказывает наше утверждение.

Из доказанного вытекает, что размерность пространства $N(A^T)$ дополняет размерность пространства $R(A)$ до полной размерности, $n = 3$. Значит, $R(A) \oplus \oplus N(A^T) = R^3$ и имеет место разложение $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \in R(A)$, $x_2 \in N(A^T)$, причем $x_1 = np_{R(A)}x$, $x_2 = np_{N(A^T)}x$.

[1] Это вытекает из известной формулы вычисления косинуса угла между векторами a и b:

$$\cos(a, b) = \frac{\sum_{i=1}^{3} a_i b_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брусин В.А.* Матрицы как линейные операторы // Соросовский Образовательный Журнал. 2000. Т.6, № 1. С. 102–107.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980. 175 с.
3. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 399 с.
4. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 223 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 270 с.

Рецензент статьи В.А. Ильин

* * *

Владимир Александрович Брусин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, член-корреспондент РАЕН. Область научных интересов – математические проблемы теории устойчивости и теории управления. Автор более 160 научных статей и учебного пособия.