МАТРИЦЫ КАК ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В. А. БРУСИН

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

MATRICES AS LINEAR OPERATORS

V. A. BRUSIN

Basic information about second and third order matrices is presented. Their connection with linear transformations of planes and spaces is explained. Examples of such transformations have been considered.

Изложены основные сведения о матрицах второго и третьего порядков. Раскрыта их связь с линейными преобразованиями плоскости и пространства. Рассмотрены примеры таких преобразований и их матрицы представлений.

Матричный аппарат является одним из самых распространенных и используемых аппаратов математики. Он позволяет существенно упрощать вычисления, дает более глубокую трактовку этих действий. На матричной основе строятся математические модели в физике, теоретической механике, сопротивлении материалов. Известна матричная модель квантовой механики, созданная В. Гейзенбергом. Наша цель – на примерах матриц второго и третьего порядков объяснить связь между матрицами и линейными преобразованиями плоскости и пространства, связь, являющуюся сущностью этого аппарата.

Линейность – одно из самых распространенных свойств объектов естествознания. Она тесно связана с принципом суперпозиции. Например, рассмотрим функцию $y = kx$, являющуюся линейным преобразованием точек числовой прямой в себя: можно сложить числа, а затем подвергнуть их этому преобразованию, а можно сначала преобразовать их по отдельности, а затем сложить. Результат будет один и тот же. Это и есть прицип суперпозиции. Аналогичным свойством обладают физические и технические линейные “преобразователи”: линейные проводники, среды, усилители сигналов и т.п.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим плоскость. Введем в ней ортогональный базис (O; **i**, **j**), определяемый точкой O – началом координат и упорядоченной парой ортогональных (перпендикулярных) векторов **i**, **j** – базисных векторов[1] [1, 2]. Если базисные векторы единичной длины, то базис называется ортонормированным.

Ортонормированный базис определяет прямоугольную систему координат: осью X будет служить ось, проходящая через точку O в направлении вектора **i**, а осью Y – ось, проходящая точку O в направлении оси **j** (рис. 1). Каждая точка M плоскости будет тогда определяться упорядоченной парой чисел (x, y) – координат точки

[1] Все изложенное остается в силе и в произвольном базисе. Ортогональный базис и прямоугольная система координат выбраны здесь как наиболее используемые.

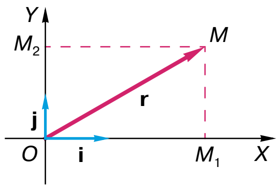

Рис. 1

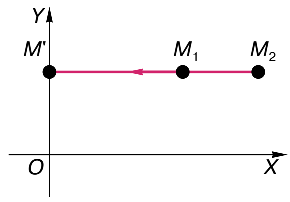

Рис. 2

M. Как известно [1, 2], координаты определяются следующим образом. С точкой M связан ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, имеющий начало в точке O и конец в точке M. Координаты (x, y) точки M определяются как компоненты вектора $\mathbf{r}$ в базисе $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, то есть из равенства векторов $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ [1, 2]. (Если начало и конец векторов находятся в точке O, то такой вектор называется нулевым вектором, будем обозначать его O.)

Таким образом, точки плоскости определяются парой чисел (x, y). Множество всех точек плоскости обозначается $\mathbf{R}^2$.

Определение 1. Говорят, что задано *преобразование или отображение T плоскости в себя* ($\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$), если каждой точке M плоскости поставлена в соответствие (по некоторому закону) точка M' этой же плоскости. Точка M' при этом называется *образом* точки M при данном преобразовании T; обозначение: $M' = T(M)$.

Примерами простейших преобразований плоскости в себя являются поворот плоскости, параллельный перенос, инверсия, гомотетия [1, 3][1].

Определение 2. Преобразование плоскости T называется *преобразованием плоскости на себя*, если каждая точка плоскости является образом какой-либо точки при этом преобразовании.

Указанные выше преобразования являются преобразованиями плоскости на себя.

В качестве другого примера рассмотрим преобразование, которое все точки плоскости ортогонально проектирует на ось OY (рис. 2). Это не будет преобразование “на себя”, так как только точки оси Y являются образами при этом преобразовании.

Определение 3. Преобразование T называется *взаимно однозначным*, если две различные точки преобразуются в две различные.

Преобразование проектирования не является взаимно однозначным.

[1] Преобразование T называется инверсией, если оно точку $M(x, y)$ преобразует в точку $M'(-x, -y)$, и называется гомотетией (с коэффициентом $k \neq 0$), если оно эту точку преобразует в точку $M'(kx, ky)$.

Определение 4. *Неподвижной точкой* преобразования T называется точка M^*, преобразующая в себя: $T(M^*) = M^*$.

Преобразование поворота, гомотетии, инверсии имеют одну неподвижную точку. Преобразование параллельного переноса неподвижных точек не имеет. Преобразование проектирования имеет бесчисленное множество неподвижных точек, заполняющих прямую, на которую производится проектирование.

Определение 5. *Тождественным преобразованием* I называется преобразование, для которого все точки плоскости являются неподвижными.

Определение 6. Говорят, что *преобразование T является произведением* (или *композицией*) *преобразований T_1 и T_2* (запись: $T = T_1 \cdot T_2$, $T = T_1T_2$), если для любой точки M преобразованную с помощью T точку M' можно получить следующим путем: сначала на точку M действуем преобразованием T_2, получим некоторую точку N', затем на N' действуем преобразованием T_1, получим точку M'. Другими словами, действие преобразования T будет эквивалентно последовательному применению преобразований T_2 и T_1. Схематично это представлено на рис. 3.

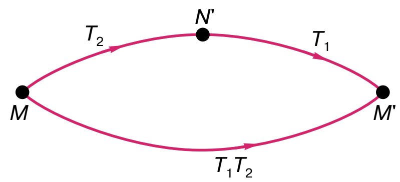

Рис. 3

Примеры

1. Композиция поворота на угол π вокруг точки O и инверсии есть тождественное преобразование.

2. Композицией поворотов вокруг точки O на углы α и β является поворот на угол $\alpha + \beta$.

Заметим, что порядок применения преобразований T_1 и T_2 играет роль, так как, вообще говоря, T_1T_2 и T_2T_1 – это не одно и то же преобразование. (В качестве простого примера достаточно рассмотреть такой случай:

T_1 – поворот вокруг точки O, T_2 – проектирование на одну из координатных осей.)

Определение 7. *Обратным к T* преобразованием называется преобразование K, удовлетворяющее равенству $TK = KT = I$.

Обратное к T преобразование K обычно обозначается T^{-1}. Из этого определения следует: 1) если T преобразует точку M в M', то T^{-1} точку M' преобразует обратно в M; 2) преобразование T^{-1} существует только в том случае, если T есть преобразование плоскости "на себя" и, кроме того, взаимно однозначно. Преобразованием, обратным к инверсии J, является само это преобразование J, то есть $JJ = J^2 = I$.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

Перейдем теперь к очень важному классу преобразований плоскости – линейным преобразованиям. Здесь преобразование T удобнее будет трактовать как преобразование радиусов-векторов точек плоскости. Смысл преобразования от этого не изменяется, так как точки плоскости однозначно определяются своими радиусами-векторами, если, конечно, начало координат зафиксировано.

Будем теперь вместо $T(M) = M'$ писать $T(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – радиусы-векторы точек M и M'.

Определение 8. Преобразование T называется *линейным*, если одно удовлетворяет следующим условиям [4]:

1) $T(O) = O$ (начало координат является неподвижной точкой);

2) для любого числа α и вектора $\mathbf{r}$ справедливо $T(\alpha\mathbf{r}) = \alpha T(\mathbf{r})$;

3) для любых векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ справедливо $T(\mathbf{r}_1) + T(\mathbf{r}_2) = T(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$.

Теорема 1. *Композиция линейных преобразований является линейным преобразованием. Преобразование, обратное к линейному (если оно существует), является линейным.*

Доказательство этой теоремы заключается в проверке выполнения для композиции и обратного преобразования всех трех свойств линейного преобразования.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ В СЕБЯ С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Начнем со сведений из матричной алгебры, необходимых для изложения содержания этого раздела [1, 5].

Определение 9. *Матрицей размера $m \times n$*, где m и n – натуральные числа, называется массив из $m \times n$ чисел, расположенных в виде таблицы, состоящей из m строк и n столбцов. Матрица называется *квадратной m-го порядка*, если $m = n$ (в противном случае она называется *прямоугольной*). Матрица размера $m \times 1$ называется *столбцом размера m*, а матрица размера $1 \times n$ – *строкой размера n*.

Мы будем иметь дело только с квадратными матрицами второго порядка. Матрицу A второго порядка можно записать в виде $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (первый индекс указывает номер строки, а второй – номер столбца, в которых расположен данный элемент матрицы).

Определим основные действия с ними.

1. Сложение матриц. Если матрица B имеет вид $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, а матрица A – вид, указанный выше, то

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

2. Умножение на число. Если k – число, то $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$, в частности $0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ – нулевая матрица.

3. Произведение матриц.

$$A \cdot B = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведение обладает ассоциативным свойством: $(AB)C = A(BC)$ (так как скобки роли не играют, то их опускают: ABC). Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной матрицей второго порядка. Очевидно, что $AE = EA = A$. Произведение матриц не обладает свойством коммутативности: в общем случае $AB \neq BA$.

С операцией произведения матриц связана операция умножения матрицы на столбец. Если $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathrm{col}(b_1 \quad b_2)$ [1] – столбец размера 2, то произведение Ab дает столбец, равный $\mathrm{col}(a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \quad a_{21}b_1 + a_{22}b_2)$. Матрицу A можно представить в виде совокупности столбцов. Если обозначить a_1 ее первый столбец, a_2 – второй, то можно записать $A = (a_1 \quad a_2)$. Аналогично $B = (b_1 \quad b_2)$, где b_1, b_2 – столбцы матрицы B. Тогда легко проверить, что $AB = (Ab_1 \quad Ab_2)$. Если A, B – матрицы, а c – столбец, то $A(Bc) = (AB)c := ABc$.

[1] Чтобы записать столбец в строку, ставят знак col (column – столбец).

Определение 10. Матрица D, для которой справедливо $AD = DA = E$, называется *обратной к матрице* A и обозначается A^{-1}. Матрица A называется *неособой*, если у нее существует обратная.

Каждой квадратной матрице A можно сопоставить число $|A|$, называемое ее *определителем*, или *детерминантом* [1, 5], причем так, что $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|E| = 1$.

Определение 11. *Определитель матрицы A второго порядка* есть число, равное $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Из определений 10, 11 нетрудно получить вид обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A будет неособой тогда и только тогда, когда $|A| \neq 0$. (Аналогия с арифметикой: обратное число существует для всех чисел, не равных нулю)

Замечание. Все определения и утверждения обобщаются на матрицы произвольного порядка с сохранением приведенных свойств [1, 5]. В следующем разделе мы проиллюстрируем это на матрицах третьего порядка.

Перейдем к основному содержанию раздела. Каждая квадратная матрица второго порядка определяет некоторое линейное преобразование плоскости в себя, и, наоборот, каждому линейному преобразованию плоскости в себя соответствует некоторая квадратная матрица второго порядка.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица второго порядка. Этой матрице поставим в соответствие преобразование T_A плоскости в себя, действующее по следующему правилу. Каждой точке $M(x, y)$ (или ее радиусу-вектору **r**) поставим в соответствие такую точку $M'(x', y')$ (или ее радиус-вектор **r'**), координаты которого вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned} \tag{1}$$

Если ввести в рассмотрение столбцы $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, то формулу (1) можно записать короче:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Легко проверить, что преобразование T_A будет линейным.

Теорема 2. *Единичной матрице E соответствует тождественное преобразование I. Произведению квадратных матриц соответствует композиция соответствующих линейных преобразований, а обратной матрице – преобразование, обратное исходному.*

Отсюда вытекает

Теорема 3. *Преобразование T_A, определенное матрицей A, будет взаимно однозначным в том и только том случае, если матрица A неособая.*

Примеры

1. Матрица $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $k > 0$, определяет гомотетию [3] с центром в точке O и коэффициентом гомотетии k. При этом если $k > 1$, то получаем преобразование растяжения, если $k < 1$, – то сжатия.

2. Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ задает преобразование инверсии или центральной симметрии.

3. Матрица $P_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – преобразование ортогонального проектирования на ось OX.

4. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ задает преобразование осевой симметрии (относительно оси OX).

5. Матрица $S(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ определяет преобразование поворота вокруг точки O на угол φ против часовой стрелки [1]. Легко проверить, что $S(\alpha + \beta) = S(\alpha) \cdot S(\beta)$, $S(0) = E$, $S^{-1}(\varphi) = S(-\varphi)$.

Матрицы вида $S(\varphi)$ называются ортогональными матрицами [1, 5], их определитель равен 1, а столбцы (и строки) задают перпендикулярные векторы единичной длины.

6. Матрица $P = \dfrac{1}{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, определяет преобразование ортогонального проектирования на прямую $ax + by = 0$ (рис. 4).

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что $ax' + by' = 0$, если $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ при любых x, y, и что вектор **r' – r** параллелен вектору нормали **N** к прямой $ax + by = 0$. В качестве вектора **N** можно взять вектор с координатами (a, b). Параллельность будет иметь место, так как координаты векторов **r' – r** и **N** пропорциональны [1, 2].

Это преобразование может быть получено и как композиция преобразований поворота на угол $(-\alpha)$, проектирования на ось X и поворота на угол α. При первом преобразовании преобразуемая точка M переходит в промежуточную точку M_1, занимающую такое же положение относительно оси OX, как исходная точка

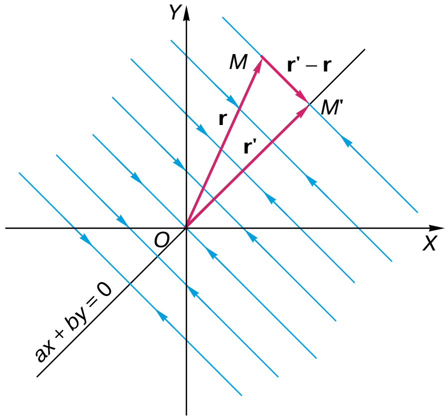

Рис. 4

M относительно прямой $ax + by = 0$. В частности, если точка M лежала на этой прямой, то точка M_1 будет лежать на оси OX и на том же расстоянии от точки O. Таким образом, искомая матрица P будет равна $S(\alpha) \times \times P_X \cdot S(-\alpha)$. Учитывая, что $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\alpha = = -a/\sqrt{a^2+b^2}$ и используя примеры 3, 5, легко получаем приведенное выше выражение для матрицы P.

Замечание. При изменении осей координат матрица, задающая линейное преобразование плоскости, изменяется. Матрицы, соответствующие одному и тому же линейному преобразованию, называются подобными [5].

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА В СЕБЯ И КВАДРАТНЫЕ МАТРИЦЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Почти все то, что было установлено для преобразований плоскости в себя, переносится и на случай преобразований пространства в себя. Однако отдельные различия все же имеются.

В пространстве ортогональный базис определяется точкой O – началом координат и упорядоченной тройкой взаимно перпендикулярных векторов **i**, **j**, **k** [1, 2]. Если эти векторы имеют единичную длину, то базис называют ортонормированным. Ортонормированный базис определяет прямоугольную систему координат: осью X будет служить направленная прямая или ось, проходящая через точку O в направлении вектора **i**, осью Y – ось, проходящая через точку O в направлении вектора **j** и ось Z – прямая, проходящая через точку O в направлении вектора **k**. Каждая точка M пространства будет определяться упорядоченной тройкой чисел (x, y, z) – координат точки M. Если связать с точкой M вектор **r**, имеющий начало в точке O и конец в точке M, то числа (x, y, z) будут компонентами или координатами этого вектора **r** в данном базисе и определяться согласно равенству $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. (Вектор **r**, однозначно связанный с точкой M, опять будем называть радиусом-вектором этой точки.) Множество точек пространства обозначается $\mathbf{R}^3$.

Далее мы должны дать определения, аналогичные определениям 1–7. Эти определения будут отличаться от определений 1–7 лишь тем, что вместо слова "плоскость" в них следует ставить слово "пространство". Поэтому формулировки этих определений мы приводить не будем. Все сказанное в разделе 1 относительно линейных преобразований без существующих изменений переносится и для пространства – только точки M и векторы **r** нужно считать находящимися не на плоскости, а в пространстве. С учетом этого определение линейного преобразования остается тем же, что и в определении 8. Остается справедливой также теорема 1.

Представление линейных преобразований пространства с помощью матриц третьего порядка

Согласно определению 9, квадратная матрица A третьего порядка может быть записана в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Сложение и умножение на число осуществляется по аналогичным правилам: нужно сложить элементы, стоящие на одинаковых местах, или умножить их на данное число. Несколько сложнее определяется умножение двух матриц. Пусть матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Определим сначала операцию свертки строки и столбца. Обозначим через $a^i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3})$ i-ю строку матрицы A, а через $b_j = (b_{1j} \quad b_{2j} \quad b_{3j})$ – j-й столбец матрицы B. Тогда операция их свертки, обозначаемая здесь как $\langle a^i, b_j\rangle$, осуществляется по правилу

$$\langle a^i, b_j\rangle = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}. \qquad (3)$$

Произведение матриц дается формулой

$$AB = \begin{pmatrix} \langle a^1, b_1\rangle & \langle a^1, b_2\rangle & \langle a^1, b_3\rangle \\ \langle a^2, b_1\rangle & \langle a^2, b_2\rangle & \langle a^2, b_3\rangle \\ \langle a^3, b_1\rangle & \langle a^3, b_2\rangle & \langle a^3, b_3\rangle \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Умножение матрицы A на произвольный столбец b осуществляется по правилу

$$Ab = \mathrm{col}(\langle a^1, b\rangle, \langle a^2, b\rangle, \langle a^3, b\rangle). \quad (5)$$

Свойства этих операций те же, что и в двумерном случае.

Единичная матрица третьего порядка определяется как

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратная – согласно определению 10.

Определение 12. Определитель матрицы A третьего порядка есть число $|A|$, равное [1, 2]

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - $$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33}). \quad (6)$$

Обратная матрица A^{-1} имеет вид [1, 2]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где M_{ij} есть определитель матрицы второго порядка, получаемой из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$.

Матрице A соответствует преобразование T_A пространства в себя, которое каждую точку $M(x, y, z)$ (или ее радиус-вектор $\mathbf{r}$) преобразует в точку $M'(x', y', z')$ (или ее радиус-вектор $\mathbf{r}'$), координаты которой вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \quad (8)$$

Если ввести в рассмотрение столбцы $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то формулу (8) можно записать в виде равенства

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Преобразование T_A является линейным преобразованием пространства в себя. Любое линейное преобразование пространства в себя может быть задано формулой (8) при соответствующих значениях коэффициентов a_{ij}. Подобные матрицы определяют одно и то же линейное преобразование, но для разных базисов.

Для линейных преобразований пространства в себя справедливы все утверждения теорем 2 и 3.

Примеры

1. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ задает преобразование ортогонального проектирования на плоскость XOY.

2. Матрица $S_{OZ}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ задает преобразование поворота на угол φ вокруг оси OZ. Легко написать матрицы $S_{OX}(\varphi)$ и $S_{OY}(\varphi)$ поворотов вокруг осей OX и OY. Произведения этих матриц при соответствующих значениях углов будет определять любой поворот в пространстве [4].

Аналогично примеру 6 из раздела 3 можно получить матрицы проектирования на любую плоскость, проходящую через начало координат.

Современные применения такого рода матриц прежде всего связаны с компьютерной графикой. В памяти компьютера формируется трехмерная модель физического тела (самолета, автомобиля, строительной конструкции, здания или целого микрорайона). Однако на экран дисплея может быть выведена лишь “плоскостная” информация, которая получается применением к точкам трехмерной модели трехмерных матриц поворота и проектирования на плоскость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980. 175 с.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1980. 336 с.
3. *Цыпкин А.Г.* Справочник по математике для средней школы. М.: Наука, 1980. 400 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1982. 270 с.

Рецензент статьи В.А. Ильин

* * *

Владимир Александрович Брусин, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета, член-корреспондент РАЕН. Область научных интересов – математические проблемы теории устойчивости и теории управления. Автор более 160 научных статей и учебного пособия.