О ПОНЯТИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И НЕПРЕРЫВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Ю. Е. ГЛИКЛИХ

Воронежский государственный университет

ON THE NOTIONS OF TOPOLOGICAL SPACE AND CONTINUOUS MAP

Yu. E. GLIKLIKH

The notions of topological space, of continuous map of topological spaces and of homeomorphism are introduced. The simplest problems of topology and properties of topological spaces are discussed.

Введены понятия топологического пространства, непрерывного отображения топологических пространств и гомеоморфизма. Обсуждены простейшие задачи топологии и свойства топологических пространств.

www.issep.rssi.ru

ВВЕДЕНИЕ

Любой человек, изучавший начала математического анализа, понимает важность понятия непрерывности функции. Немного упрощая ситуацию, можно сказать, что непрерывность числовой функции – это математическая формализация следующего свойства: график этой функции можно нарисовать на листе бумаги, не отрывая карандаша, то есть график нигде не разрывается. Числовая функция есть частный случай более общего понятия отображения, которое определяется уже не для чисел, а для элементов произвольных множеств. Возникает вопрос, можно ли определить понятие непрерывности отображений на множествах. Оказывается, для того чтобы корректно ввести это понятие, необходимо задать на множествах дополнительную структуру, так называемую топологию; множество с указанной структурой называется топологическим пространством.

Математическая дисциплина, изучающая указанные выше понятия (и не только их), тоже называется топологией. В настоящей статье мы коснемся самых начальных понятий этой дисциплины, попытаемся хотя бы немного описать задачи, стоящие перед ней, привести экзотические и не очень экзотические примеры топологических пространств, объяснить, что из привычных нам вещей сохраняется в общих топологических пространствах, а что (и, главное, как) может меняться, и т.д.

Мы попытаемся дать достаточно строгое, но вместе с тем простое изложение начал топологии. И если это первоначальное знакомство заинтересует читателя, следует обратиться к книгам, указанным в списке литературы.

Автор благодарит Л.А. Морозову за помощь в изготовлении рисунков для этой статьи.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

Напомним классическое определение непрерывности числовой функции f в точке x, восходящее к Коши.

Определение 1. Функция f называется *непрерывной* в точке x, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если для точки x' выполнено неравенство $|x - x'| < \delta$, то $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Введенное выше определение допускает модификацию, удобную для дальнейшего изложения.

Определение 1'. Функция f называется *непрерывной в точке* x, если для любой окрестности U точки $f(x)$ существует окрестность V точки x, такая, что из того, что точка x' принадлежит V, следует, что $f(x')$ принадлежит U.

Нетрудно видеть, что для числовых функций определения 1 и 1' эквивалентны, поскольку, с одной стороны, множество точек x', таких, что $|x - x'| < \delta$, является окрестностью точки x, называемой δ-окрестностью x (соответственно множество точек y, таких, что $|f(x) - y| < \varepsilon$, является окрестностью точки $f(x)$, называемой ε-окрестностью $f(x)$), а с другой стороны, внутри любой окрестности U точки $f(x)$ содержится ε-окрестность для достаточно малого ε (соответственно в любой окрестности V точки x содержится δ-окрестность для достаточно малого δ).

Рассмотрим два множества: X и Y. Говорят, что задано отображение $F\colon X \longrightarrow Y$, если задано правило (закон), по которому каждому элементу x из X поставлен в соответствие элемент $y = F(x)$ из Y. Числовая функция является наиболее известным примером отображения. В этом случае обычно $X = Y = R$ – множество вещественных чисел (числовая прямая), а закон F задается формулой: например, вещественному числу x ставится в соответствие вещественное число $\sin x$ (в этом случае F есть функция "синус").

Понятие отображения определено для любой пары произвольных множеств. Однако можно ли в произвольном случае дать определение непрерывности F по аналогии с определением 1 или определением 1'? Нетрудно видеть, что этого сделать нельзя, поскольку на произвольных множествах нет ни понятия окрестности, используемого в определении 1', ни понятия δ-окрестности (ε-окрестности), используемого в определении 1. Так что для введения корректного определения понятия непрерывности F мы должны либо ввести предварительно понятие окрестности вообще, либо понятие ε-окрестности. На примере числовых функций видно, что ε-окрестности являются частным случаем окрестностей вообще, и если мы хотим дать наиболее общее определение непрерывности, мы должны сосредоточить свое внимание на корректном введении понятия просто окрестности точки в произвольном множестве.

Множество, на котором "правильно" введено понятие окрестности, называется топологическим пространством. Подчеркнем: требование, чтобы множество было топологическим пространством, является минимальным для того, чтобы было корректно определено понятие непрерывного отображения. Отметим для полноты, что множество, на котором корректно введено понятие ε-окрестности, называется метрическим пространством и метрическое пространство является частным случаем топологического. В настоящей статье мы не будем рассматривать метрические пространства. Это понятие освещается в других статьях настоящего журнала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ

В математическом анализе широко используется понятие открытого множества (например) на числовой прямой: множество называется открытым, если для любой его точки достаточно малый интервал с центром в этой точке (то есть ε-окрестность для достаточно малого ε) целиком входит в это множество. Для открытых множеств выполняются два важных свойства: объединение любого (даже бесконечного) набора открытых множеств есть открытое множество и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Оказывается, если некоторый набор множеств обладает этими свойствами, то с множествами из указанного набора можно работать во многом так же, как с обычными открытыми множествами. Дадим точные определения.

Рассмотрим произвольное множество X.

Определение 2. Набор τ подмножеств множества X называется *топологией*, если он обладает следующими свойствами:

(i) X и пустое множество входят в τ;

(ii) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ;

(iii) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ. Если набор τ задан, X называется *топологическим пространством*, а входящие в τ множества называются *открытыми*.

Примером топологического пространства является числовая прямая с множествами, открытыми в обычном смысле. Действительно, вся числовая прямая очевидным образом открыта, пустое множество включают в число открытых по определению (это непротиворечиво, поскольку в пустом множестве нет точек, тогда можно считать, что каждая из них (!) входит в пустое множество с некоторой ε-окрестностью). Как уже сказано выше, свойства (ii) и (iii) выполнены. Топологию, состоящую из обычных открытых множеств на числовой прямой, будем называть *обычной топологией*.

Приведем еще два примера. На любом X рассмотрим топологию, в которой всего два множества: все X

и пустое. Такая топология называется тривиальной. Противоположная ситуация – на любом X включим в топологию вообще все подмножества X (в частности, все его точки, то есть одноточечные подмножества), само X и пустое подмножество. Эта топология называется дискретной.

Обратите внимание, что тривиальную и дискретную топологию мы задали описав все входящие в них множества. С обычной топологией мы не смогли это сделать, и нам пришлось описывать ее с помощью свойства, которому удовлетворяют ее множества. Чтобы избежать этого неудобства, было введено понятие базы топологии.

Определение 3. Набор открытых множеств S называется *базой топологии* τ, если любое множество из τ есть (возможно, бесконечное) объединение множеств из S.

Базой обычной топологии на прямой являются ε-окрестности. Действительно, обычное открытое множество характеризуется тем, что каждая его точка имеет некоторую ε-окрестность, входящую в это множество. Так что очевидно, что само множество есть объединение указанных ε-окрестностей всех его точек.

Приведем еще два примера. Первый из них – топология Зарисского на числовой прямой – интересен (кроме всего прочего) тем, что возник в реальной математической задаче, а не как экзотический пример для учебника. В эту топологию включены вся прямая и пустое множество, а также все множества на прямой, дополнения до которых состоят из конечного числа точек.

Следующая топология на числовой прямой состоит из всей прямой и пустого множества, а также всех открытых интервалов вида $(a, +\infty)$, где a – точка прямой. Эта топология называется правой. Отметим, что в точности аналогично можно задать и левую топологию.

Топология может наследоваться. Например, в плоскости имеется топология, состоящая из обычных открытых множеств (аналогично случаю числовой прямой). Тогда на лежащей в плоскости прямой возникает топология, в которой открытыми множествами являются пересечения с этой прямой множеств, открытых в плоскости. Эта топология называется индуцированной. В рассматриваемом примере индуцированная топология – это обычная топология на прямой.

В некоторых случаях различные топологии на одном и том же множестве можно сравнивать между собой. Говорят, что топология τ на X сильнее топологии σ на том же множестве, если все множества, входящие в σ, входят также и в τ. Очевидно, что любая топология сильнее, чем тривиальная, а дискретная сильнее любой топологии. Также понятно, что обычная топология сильнее, чем топология Зарисского и чем правая топология, и в то же время топологию Зарисского и правую топологию сравнить между собой нельзя – ни одна из них не является более сильной, чем другая (более того, докажите, что если некоторое множество числовой прямой входит сразу в обе эти топологии, то это либо вся числовая прямая, либо пустое множество).

Определение 4. *Окрестностью точки в топологическом пространстве* называется любое открытое множество, содержащее указанную точку.

Очевидно, что в обычной топологии понятие окрестности удовлетворяет данному определению.

Используя введенное определение окрестности, нетрудно доказать следующее свойство открытых множеств любого топологического пространства: множество A открыто тогда и только тогда, когда каждая точка x из A имеет окрестность, целиком входящую в A. Докажите это утверждение самостоятельно. Обратите внимание, что характеристическое свойство обычных открытых множеств на числовой прямой является частным случаем этого утверждения.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЗАДАЧИ ТОПОЛОГИИ

Пусть задано отображение $F: X \longrightarrow Y$, где X и Y – топологические пространства с топологиями соответственно τ и σ. Поскольку мы ввели определение окрестности точки в топологическом пространстве, можем дать определение непрерывности F в точке аналогично определению 1'.

Определение 5. Отображение F называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности $U \in \sigma$ точки $f(x)$ в Y существует окрестность $V \in \tau$ точки x в X, такая, что из того, что точка x' принадлежит V, следует, что $f(x')$ принадлежит U.

Определение 6. Отображение, непрерывное в каждой точке x множества X, называется *непрерывным на* X.

В случае, когда множество X зафиксировано, будем называть отображения просто непрерывными, не указывая X.

Непрерывные отображения характеризуются следующим свойством.

Теорема. Отображение $F: X \longrightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $U \in \sigma$ пространства Y его прообраз $V = F^{-1}(U)$ принадлежит τ, то есть является открытым множеством топологического пространства X.

Доказательство. Пусть F непрерывно, то есть удовлетворяет определению 6. Выберем открытое множество U в Y. Поскольку U – окрестность каждой своей точки $y = F(x)$, $x \in V = F^{-1}(U)$, то, по определению 5, каждое x имеет окрестность V_x, такую, что $F(V_x) \subseteq U$. Из последнего включения, в частности, следует, что $V_x \subseteq V$, так как, по определению, V есть множество всех точек x из X, таких, что $F(x) \in U$. Тогда $V = \bigcup_{x \in V} V_x$. Действительно, так как каждое x принадлежит своему V_x, $\bigcup_{x \in V} V_x$ содержит все x, то есть включает в себя V. Кроме того, так как все V_x содержатся в V, то и их объединение содержится в V. Из двух включений $V \subseteq \bigcup_{x \in V} V_x$ и $V \supseteq \bigcup_{x \in V} V_x$ следует равенство $V = \bigcup_{x \in V} V_x$. Таким образом, V есть объединение открытых множеств V_x, то есть оно само открыто по свойству (ii) топологии.

Теперь пусть для любого открытого множества U топологического пространства Y (то есть $U \in \sigma$) множество $V = F^{-1}(U)$ открыто в X (то есть принадлежит τ). Покажем, что выполнено определение 5 в каждой точке $x \in X$. Выберем произвольную окрестность $U_{F(x)}$ точки $F(x)$ в Y. Это открытое множество, и поэтому $V_x = F^{-1}(U_{F(x)})$ открыто в X и при этом по построению $F(V_x) = U_{F(x)}$. Итак, для любой окрестности $U_{F(x)}$ точки $F(x)$ существует окрестность V_x точки x, такая, что $F(V_x)$ содержится в $U_{F(x)}$, то есть выполнено определение 5. Теорема доказана.

Эта теорема дает очень простой критерий непрерывности отображений топологических пространств. Он очень полезен даже для случая числовых функций, хотя и не входит в традиционный стандартный курс математического анализа.

Полученная нами теорема также позволяет строить новые топологии следующим образом. Пусть задан некоторый класс отображений F (обозначим этот класс через $\{F\}$) из множества X в числовую прямую R с обычной топологией (или в любое другое топологическое пространство — в этом случае конструкция аналогична). Зададим набор τ подмножеств в X, включив туда множества вида $F^{-1}(U)$ для всех открытых множеств U в R и для всех отображений F из $\{F\}$, все их объединения и конечные пересечения, а также все X и пустое множество. Полученный набор τ будет топологией. При этом по теореме из построения следует, что все отображения из $\{F\}$ будут непрерывными! Подобные топологии часто используются и оказываются весьма полезными.

Определение 7. Отображение F из топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *гомеоморфизмом*, если выполнены следующие три условия: (i) F непрерывно; (ii) F взаимно однозначно (то есть для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, такое, что $F(x) = y$, и указанное x единственно; в частности, существует обратное отображение $F^{-1}: Y \longrightarrow X$); (iii) отображение F^{-1} непрерывно.

Если существует гомеоморфизм $F: X \longrightarrow Y$, то говорят, что X и Y гомеоморфны друг другу. В этом случае мы можем наложить X на Y без самопересечений и разрывов, приклеивая $x \in X$ к $F(x) \in Y$. Так что получается, что X и Y устроены одинаково.

Понятия гомеоморфизма и гомеоморфности являются центральными для многих разделов топологии, в которых изучаются характеристики, описывающие гомеоморфные пространства. Поскольку гомеоморфные пространства устроены одинаково (см. выше), то их можно не различать, то есть считать разными экземплярами одного и того же объекта. Существует крылатая фраза, что тополог (математик, занимающийся топологией) — это человек, не отличающий бублик от чайной чашки (задача: постройте гомеоморфизм между бубликом и чашкой с одной ручкой!). Это означает, что наиболее общие (топологические) свойства бублика и чашки одинаковы (они телесны и имеют одну дырку).

Другие разделы топологии изучают характеристики непрерывных отображений и некоторые другие вопросы. При этом часто получаются результаты, важные для приложений. Например, удается вычислить некоторые характеристики непрерывных отображений, входящих в определенные уравнения, которые показывают, имеет ли это уравнение решение. Это очень важно в случаях, когда явно решить уравнение невозможно (не удается найти формулу для решения).

КАКИЕ БЫВАЮТ ТОПОЛОГИИ

Итак, в произвольном топологическом пространстве мы можем (в определенных пределах) работать так же успешно, как на числовой прямой, и этим топологические

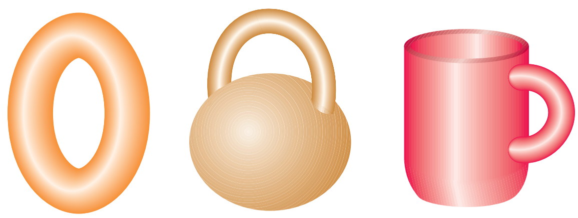

Рис. 1. Бублик, гиря и чашка с одной ручкой гомеоморфны друг другу

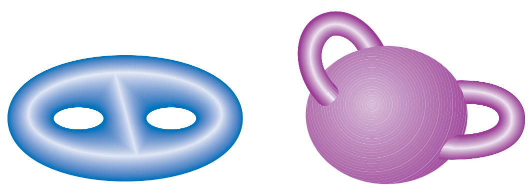

Рис. 2. Крендель и шар с двумя ручками гомеоморфны друг другу и негомеоморфны бублику, гире с одной ручкой и чашке с одной ручкой, изображенным на рис. 1

пространства похожи друг на друга. Однако каждое топологическое пространство обладает специфическими свойствами, которые иногда резко отличаются от свойств числовой прямой.

Известны пять так называемых (основных) аксиом отделимости, из которых мы приведем три простейшие. Отметим, что числовая прямая с обычной топологией удовлетворяет всем пяти аксиомам. Пространства, удовлетворяющие только некоторым из них, естественно, отличаются от нее своими свойствами. Итак,

Аксиома T_0 (аксиома Колмогорова). *Для любых двух не совпадающих точек хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Очевидно, что для тривиальной топологии аксиома T_0 не выполняется: в этой топологии есть ровно одно непустое открытое множество – всё X, поэтому всё X будет единственной возможной окрестностью для любой точки и для произвольной пары точек их "любые" окрестности просто совпадают. Все остальные пространства, описанные выше, этим свойством обладают (докажите!).

Аксиома T_1. *Для любых двух не совпадающих точек каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Нетрудно видеть, что пространство, удовлетворяющее аксиоме T_1, удовлетворяет и аксиоме T_0, а не удовлетворяющее аксиоме T_0, не удовлетворяет и аксиоме T_1. Так что пространство с тривиальной топологией не удовлетворяет аксиоме T_1. Числовая прямая с правой топологией тоже не удовлетворяет T_1. Действительно, пусть $x < y$. Тогда, взяв $x < a < y$, мы получим, что (a, ∞) содержит y (то есть является его окрестностью) и не содержит x (отсюда следует выполнение аксиомы T_0). Однако для любого $b < x$ интервал (b, ∞) содержит и x, и y, то есть любая окрестность точки x содержит и y.

Отметим, что числовая прямая с топологией Зарисского удовлетворяет аксиоме T_1. Действительно, для $x \neq y$ окрестностью точки x, не содержащей y, является дополнение $R\backslash y$, а окрестностью точки y, не содержащей x, является $R\backslash x$. Легко видеть, что прямая с обычной и дискретной топологиями удовлетворяют аксиоме T_1.

Аксиома T_2 (аксиома Хаусдорфа). *Для любых двух не совпадающих точек у каждой из них можно выбрать по окрестности так, чтобы эти окрестности не пересекались.*

Понятно, что из выполнения аксиомы T_2 следует выполнение аксиомы T_1, и, значит, если не выполняется аксиома T_1, то не выполняется и аксиома T_2.

Числовая прямая с топологией Зарисского не удовлетворяет аксиоме T_2. Действительно, поскольку в этой топологии открытое множество определяется как множество, дополнение до которого состоит из конечного числа точек, а в прямой число точек бесконечно, то любые два открытых множества (в том числе любые две окрестности) пересекаются по бесконечному числу точек.

Очевидно (покажите!), что прямая с обычной и прямая с дискретной топологиями удовлетворяют аксиоме T_2.

Имеются еще аксиомы T_3 и T_4, на которых мы в этой статье не останавливаемся.

Влияние аксиом отделимости на свойства топологических пространств проиллюстрируем на примере понятия предела последовательности, изучаемого в старших классах школы. В топологическом пространстве определение предела выглядит следующим образом (сравните с обычным определением).

Определение 8. Точка $x \in X$ называется *пределом последовательности точек* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ из X, если для любой окрестности U точки x существует номер $N = N(U)$, такой, что для всех $n > N$ точки x_n лежат в U.

Например, в обычной топологии на прямой пределом последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ является точка 0, для "постоянной" последовательности $a, a, \ldots, a, \ldots$ (a – фиксированное число) предел равен a и последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (натуральный ряд) не имеет предела. В обычной топологии предел последовательности может быть только один, если он вообще существует, и он находится как бы рядом с точками последовательности (это верно для любого пространства, удовлетворяющего аксиоме T_2).

Для пространств, не удовлетворяющих каким-нибудь аксиомам отделимости, свойства пределов могут быть весьма необычными.

Утверждение 1. *В правой топологии на прямой любая точка $b < a$ является пределом "постоянной" последовательности $a, a, \ldots, a, \ldots$*

Действительно, окрестность точки b в правой топологии есть множество вида (c, ∞), где $c < b$. Поскольку $b < a$, (c, ∞) содержит a, то есть все члены последовательности $a, a, \ldots, a, \ldots$ Таким образом, b – предел.

Теперь рассмотрим прямую с топологией Зарисского. Здесь имеется еще более впечатляющий пример предела последовательности.

Утверждение 2. *В топологии Зарисского любая точка $x \in R$ является пределом натурального ряда.*

Действительно, зафиксируем произвольную окрестность U точки x. По определению топологии Зарисского, дополнение U до R состоит из конечного числа точек. Поскольку в натуральном ряду бесконечное число точек, отсюда следует, что в U содержится бесконечное число его точек, то есть начиная с некоторого N все точки $n > N$ лежат в U.

Обычная и дискретная топологии удовлетворяют аксиомам T_0–T_2, и в них не существует столь экзотических примеров пределов. Однако не следует думать, что дискретная топология очень похожа на обычную. Напомним, что в дискретной топологии открытым является любое множество, то есть, в частности, любая точка x является сама своей окрестностью (чтобы не запутаться, обозначим эту окрестность через $\{x\}$). Понятно, что в этом случае в окрестности $\{x\}$ точки x нет точек, отличных от x, то есть любая фиксированная точка x может быть пределом только таких последовательностей, у которых начиная с некоторого N все члены $x_{n>N}$ равны x.

Имеется еще одна важная система аксиом, относительно которых, кстати, различаются две последние топологии.

Определение 9. Говорят, что *топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности*, если топология этого пространства имеет базу, состоящую из счетного набора множеств (то есть множества, входящие в эту базу, можно занумеровать натуральными числами).

Обычная топология на прямой имеет счетную базу — это ε-окрестности с рациональным ε, центрами которых являются рациональные точки (как известно, множество рациональных чисел счетно). Дискретная топология на прямой не имеет счетной базы: в любую базу этой топологии должны входить все точки прямой, а, как известно, это множество более чем счетно (его нельзя перенумеровать).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М.: Наука, 1995. 416 с.

2. *Стинрод Н., Чинн У.* Первые понятия топологии. М.: Мир, 1967. 224 с.

3. *Франсис Дж.* Книжка с картинками по топологии. М.: Мир, 1991. 240 с.

4. *Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л.* Гомотопическая топология. М.: Изд-во МГУ, 1969. 460 с.

Рецензенты статьи Е.М. Вечтомов, В.А. Ильин

* * *

Юрий Евгеньевич Гликлих, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и топологических методов анализа Воронежского государственного университета. Область научных интересов – глобальный анализ, стохастический анализ, математическая физика. Автор трех монографий и более 85 научных статей.