THE INFINITESIMAL BENDINGS OF THE SURFACES

V. T. FOMENKO

The basic notions of the theory of the infinitesimal bendings of the surfaces in an Euclidean space are described. The proof of the rigidity of ovaloids is given by the method of integral formulas. The applications of the theory of the analytic functions of the complex variable to the solution of the problems of the infinitesimal bendings of the surface with a boundary are indicated.

Описаны основные понятия теории бесконечно малых изгибаний поверхностей евклидова пространства. Методом интегральных формул дано доказательство жесткости овалоидов. Указано применение теории аналитических функций комплексного переменного к решению задач бесконечно малых изгибаний поверхностей с краем.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Т. ФОМЕНКО

Таганрогский государственный педагогический институт

Предметом нашего рассмотрения являются бесконечно малые изгибания поверхностей евклидова пространства. С понятием поверхности мы часто встречаемся в повседневной жизни. Под поверхностью обычно понимают границу или часть границы тела в пространстве. Например, мы говорим о поверхности земного шара, поверхности крыла самолета или поверхности стола. Поверхность как множество точек в пространстве может быть устроена разнообразно. Поверхности могут быть замкнутыми, подобно сфере или поверхности бублика, либо неограниченно простираться в пространстве наподобие плоскости (рис. 1). Даже в окрестности каждой точки поверхность может быть устроена по-разному. Для сравнения можно взять, к примеру, вершину конуса, точку на ребре пирамиды и точку на сфере или плоскости. Жизненный опыт показывает, что наибольшее применение имеют достаточно гладкие поверхности. С этой целью многие металлические, каменные и деревянные изделия шлифуют и полируют для придания их поверхностям различной степени гладкости, а изделия из тканей гладят, добиваясь с помощью горячего утюга или специального приспособления ровной поверхности ткани. Отсюда и происходит математический термин “гладкость поверхности”.

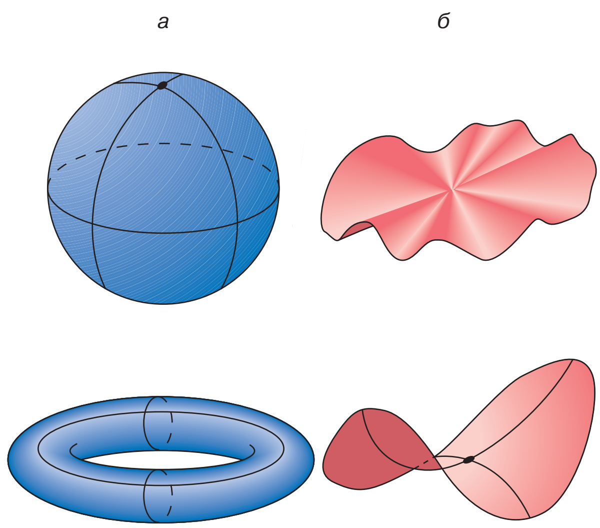

Рис. 1. *а* – замкнутые поверхности, *б* – поверхности с краем

Для изучения гладких поверхностей широко используют методы дифференциального исчисления. Соответствующий раздел геометрии носит название дифференциальной геометрии. Область дифференциальной геометрии, где геометрические образы, в частности поверхности, изучаются на всем их протяжении, называют дифференциальной геометрией "в целом". Исследование поверхностей "в целом" обладает определенной спецификой, требуя помимо обычного аппарата классической дифференциальной геометрии еще дополнительных и разнообразных соображений (интегральных, теоретико-функциональных и т.д.). Однако в окончательном виде многие теоремы этой области геометрии наглядны, формулируются в общеизвестных терминах и доказательства их часто оказываются доступными для понимания без специальной подготовки.

Поверхность удобно также представлять в виде тонкой пленки или оболочки, толщиной которой можно пренебречь по сравнению с другими ее линейными размерами (длиной и шириной оболочки). При такой интерпретации поверхности легко представить себе деформацию поверхности в пространстве. Если с течением времени форма поверхности или ее положение в пространстве изменяются, то будем говорить о деформации поверхности. Обычно на практике рассматривают деформации поверхностей, не допускающие их разрывов с течением времени. В таких случаях говорят о непрерывных деформациях поверхностей. Примером таких деформаций поверхностей могут служить изменение формы воздушного шарика при его надувании или изменение формы мыльной пленки, натянутой на замкнутый проволочный контур при непрерывной деформации последнего. Наибольший интерес в дифференциальной геометрии "в целом" представляют деформации, для которых допускается изменение длин кривых на поверхности, но это изменение в начальный момент деформации мало по сравнению с изменением пространственных расстояний между поверхностями. Такие деформации называют бесконечно малыми изгибаниями поверхности.

Представим себе поверхность, изготовленную в виде тонкой оболочки или пленки из гибкого нерастяжимого материала (например: лист бумаги, шарик для игры в настольный теннис либо сосуд, изготовленный из тонкой жести). Под воздействием внешних сил такая поверхность может менять свое положение в пространстве и свою форму. Изменение положения и формы такой поверхности в начальный момент деформации можно рассматривать как бесконечно малые изгибания этой поверхности. Каждая поверхность в отношении бесконечно малых изгибаний ведет себя по-разному. Так, опыт показывает, что лист бумаги допускает бесконечно малые изгибания с большим произволом, а бесконечно малые изгибания шарика для игры в настольный теннис исчерпываются перемещениями его в пространстве как твердого тела.

Уже в простейших случаях наблюдается различное поведение замкнутых поверхностей и поверхностей с краем в отношении бесконечно малых изгибаний.

Прочность или жесткость любой конструкции, изготовленной из тонких нерастяжимых оболочек, определяется наличием или отсутствием бесконечно малых изгибаний поверхности, описывающей эту конструкцию. Необходимость исследования таких конструкций на прочность часто возникает в авиастроении, автомобильной промышленности, машиностроении и других областях техники. Ниже мы опишем некоторые методы исследований бесконечно малых изгибаний поверхностей и докажем некоторые результаты этой теории.

ИЗГИБАЮЩИЕ ПОЛЯ

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве E^3 гладкую поверхность F с радиусом-вектором $\bar{r}$ (рис. 2). Будем считать, что вектор-функция $\bar{r}$ является непрерывно дифференцируемой функцией точки поверхности. Пусть далее $\bar{z}$ — некоторая непрерывно дифференцируемая вектор-функция, заданная на F. Рассмотрим деформацию поверхности F, при которой она к моменту времени t переходит в поверхность F_t с радиусом-вектором

$$\bar{r}_t = \bar{r} + t\bar{z}. \tag{1}$$

Легко видеть, что при малых значениях параметра t радиус-вектор $\bar{r}_t$ действительно описывает поверхность при фиксированном значении t. Пусть M — некоторая точка на поверхности F. Сместимся в направлении d из точки M в достаточно близкую к ней точку M'. Тогда длина ds дуги $\breve{MM'}$ на поверхности F может быть вычислена по формуле $ds = \sqrt{(d\bar{r}, d\bar{r})}$, где под знаком радикала в круглых скобках стоит скалярное произведение полного дифференциала

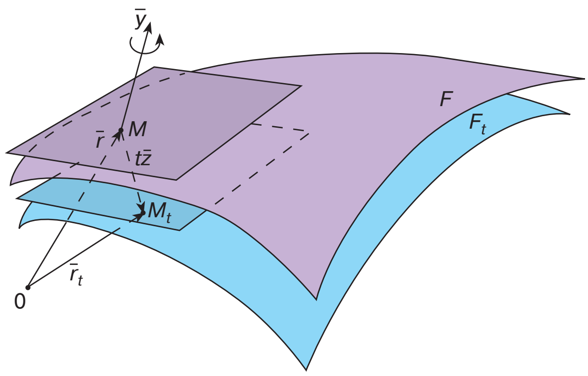

Рис. 2. Деформация поверхности F в поверхность F_t

$d\bar{r}$ на себя. При указанной деформации (1) точки M и M' поверхности F перейдут соответственно в точки M_t и M_t' на поверхности F_t и длина ds_t дуги $\breve{M_tM_t'}$ на поверхности F_t будет вычисляться по формуле

$$ds_t = \sqrt{(d\bar{r}, d\bar{r}) + 2t(d\bar{r}, d\bar{z}) + t^2(d\bar{z}, d\bar{z})}. \qquad (2)$$

Очевидно, что функция ds_t дифференцируема по параметру t.

Бесконечно малым изгибанием поверхности F называют такую деформацию вида (1), при которой длина ds_t для всех дуг на поверхности F в начальный момент деформации стационарна, то есть

$$\frac{d}{dt}(ds_t)\bigg|_{t=0} = 0. \qquad (3)$$

Векторное поле $\bar{z}$, определяющее указанным образом бесконечно малое изгибание поверхности F, называется изгибающим полем.

Из условия (3) с помощью формулы (2) находим, что вектор-функция $\bar{z}$, заданная на поверхности F, является изгибающим полем тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(d\bar{r}, d\bar{z}) = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называют уравнением бесконечно малых изгибаний поверхности.

Уравнение (4) имеет очевидное решение

$$\bar{z} = [\bar{a}, \bar{r}] + \bar{b}, \qquad (5)$$

где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольно выбранные постоянные векторы, а квадратные скобки означают векторное произведение в E^3.

Изгибающее поле (5) можно интерпретировать как поле смещений точек поверхности F при ее бесконечно малом перемещении в пространстве как твердого тела. Поэтому изгибающие поля вида (5) называют тривиальными, а соответствующие им бесконечно малые изгибания – тривиальными изгибаниями.

Основная задача теории бесконечно малых изгибаний поверхностей состоит в отыскании нетривиальных изгибающих полей, удовлетворяющих уравнению (4). Если поверхность подчинена тем или иным внешним связям, то при решении уравнения (4) нужно учитывать эти связи. Тогда задача теории изгибаний будет заключаться в отыскании решений уравнений (4), совместимых с внешними связями, и в выделении среди них нетривиальных [1].

Если все решения уравнения (4) исчерпываются изгибающими полями вида (5), то поверхность называется жесткой, в противном случае – нежесткой.

В качестве примера нежесткой поверхности укажем на кусок плоскости π, закрепленной по краю $\partial\pi$. Внешняя связь в этом случае означает, что изгибающее поле $\bar{z}$ равно нулю на краю поверхности. Возьмем векторное поле $\bar{z} = \varphi \cdot \bar{k}$, где $\bar{k}$ – единичный постоянный вектор нормали к плоскости π, φ – некоторая дифференцируемая на π функция, равная нулю на границе $\partial\pi$. Выберем начало отсчета в E^3 в некоторой точке плоскости π. Тогда радиус-вектор $\bar{r}$ текущей точки плоскости π и его дифференциал $d\bar{r}$ расположены в плоскости π. Кроме того, имеем $\bar{z} = d\varphi\bar{k}$, и потому $(d\bar{r}, d\bar{z}) = 0$. Это означает, что векторное поле $\bar{z} = \varphi\bar{k}$ является изгибающим полем при любом выборе функции φ. Этим доказана нежесткость куска плоскости, закрепленного по краю. Отметим, что этот факт имеет механическую интерпретацию: мембрана барабана может давать колебания произвольной частоты.

Вопросы гладкости поверхности и ее изгибающих являются важными и сложными в теории бесконечно малых поверхностей и до настоящего времени еще полностью не решены. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что рассматриваемые поверхности и их изгибающие поля являются трижды непрерывно дифференцируемыми.

ПОЛЯ ВРАЩЕНИЙ

При исследовании разрешимости уравнения (4) могут возникнуть трудности, связанные с тем, что методы решения дифференциального уравнения (4) позволяют установить существование решений, но явного вида решений зачастую найти не удается. Тогда вопрос о жесткости рассматриваемой поверхности остается открытым. В связи с этим уравнение (4) стремятся заменить другим уравнением с другой искомой функцией, но так, чтобы наличие ненулевого решения этого уравнения гарантировало нежесткость рассматриваемой поверхности. С этой целью вместо изгибающего поля $\bar{z}$ вводят новое векторное поле $\bar{y}$, связанное с полем $\bar{z}$ следующим образом: для всякого изгибающего поля $\bar{z}$ существует единственное поле $\bar{y}$, такое, что $d\bar{z} = [\bar{y}, d\bar{r}]$. Так как, согласно (1), имеем

$$d\bar{z} = \lim_{t \to 0}\frac{1}{t}(d\bar{r}_t - d\bar{r}),$$

то вектор $\bar{y}$, приложенный к некоторой точке поверхности F, можно рассматривать как вектор мгновенной оси вращения пучка линейных элементов поверхности F, связанного с этой точкой. Именно поэтому поле $\bar{y}$ называют полем вращений бесконечно малого изгибания поверхности F.

В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей часто используют поверхность Y, определяемую радиусом-вектором $\bar{y}$, отложенным от начала координат в E^3. Эту поверхность называют диаграммой вращений бесконечно малого изгибания поверхности F.

Справедливо утверждение: *в соответствующих гладких точках поверхностей F и Y касательные плоскости к ним параллельны.* Аналитически этот факт устанавливается следующим образом. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ – некоторая плоская область, – какая-нибудь параметризация поверхности F или ее части. Касательная плоскость поверхности в каждой ее точке определяется векторами

$$\partial_1\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1}, \qquad \partial_2\bar{r} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^2}.$$

Обозначим коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности F соответственно через $g_{ij} = (\partial_i\bar{r}, \partial_j\bar{r})$; $b_{ij} = (\partial_{IJ}\bar{r}, \bar{n})$; $i, j = 1, 2$, где $\bar{n} = [\partial_1\bar{r}, \partial_2\bar{r}]/\sqrt{g}$ – единичный вектор нормали к F; $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, $\partial_{IJ}\bar{r} = \partial_i(\partial_j\bar{r})$. Из определения поля вращений $\bar{y}$ следует, что $\partial_i\bar{z} = [\bar{y}, \partial_i\bar{r}]$, $i = 1, 2$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $\partial_{12}\bar{r} = \partial_{21}\bar{r}$, $\partial_{12}\bar{z} = \partial_{21}\bar{z}$, находим

$$\partial_1\bar{y} = \alpha\partial_1\bar{r} + \beta\partial_2\bar{r}, \qquad \partial_2\bar{y} = \gamma\partial_1\bar{r} - \alpha\partial_2\bar{r}, \tag{6}$$

где α, β, γ – некоторые функции, что и доказывает наше утверждение. При сделанных предположениях относительно гладкости рассматриваемых поверхностей и их изгибающих полей можно установить, что поле $\bar{y}$ дважды непрерывно дифференцируемо. Это означает, что $\partial_{12}\bar{y} = \partial_{21}\bar{y}$, и поэтому из формул (6) следует, что функции α, β, γ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений, рассматриваемой в области $\mathcal{D}$:

$$\begin{gathered} \gamma b_{11} - 2\alpha b_{12} - \beta b_{22} = 0, \\ \partial_2\alpha - \partial_1\gamma = \Gamma^1_{11}\gamma - 2\Gamma^1_{12}\alpha - \Gamma^1_{22}\beta, \\ \partial_1\alpha + \partial_2\beta = \Gamma^2_{11}\gamma - \Gamma^2_{12}\alpha - \Gamma^2_{22}\beta. \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь Γ^i_{jk} – символы Кристоффеля поверхности F, вычисленные по формулам:

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_{l=1}^{2} g^{il}\Gamma_{l,\,jk}, \qquad \Gamma_{l,\,jk} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk});$$

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}, \quad i, j, k = 1, 2.$$

Всякое ненулевое решение системы (7) в случае односвязной поверхности F порождает нетривиальное изгибающее поле поверхности F; наличие только нулевого решения системы (6) обозначает жесткость рассматриваемой поверхности.

Помимо диаграммы вращений Y по изгибающему полю поверхности F могут быть построены еще некоторые вспомогательные поверхности, связанные с исходной поверхностью F свойствами алгебро-геометрической природы. Всего таких поверхностей вместе с исходной поверхностью 12, и их совокупность носит название венка Дарбу. Они достаточно хорошо изучены.

ЖЕСТКОСТЬ ОВАЛОИДОВ

Здесь будет предложено принадлежащее В. Бляшке доказательство одной из важных теорем бесконечно малых изгибаний. Предварительно напомним некоторые понятия.

Геометрическое тело в пространстве E^3 называют выпуклым, если все точки отрезка прямой, соединяющей любые две точки тела, также принадлежат этому телу. Поверхность выпуклого тела называют выпуклой поверхностью. Шар, куб, тетраэдр – выпуклые тела, а поверхности, их ограничивающие, – выпуклые поверхности. Овалоидом называют всякую замкнутую выпуклую поверхность. Поверхность шара, куба, тетраэдра, трехосный эллипсоид – все это овалоиды. Имеет место

Теорема. *Трижды непрерывно дифференцируемый овалоид, гауссова кривизна которого $K > 0$, есть поверхность жесткая.*

Напомним, что гауссова кривизна K вычисляется по формуле

$$K = \frac{b}{g}, \qquad \text{где } b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

Доказательство этой теоремы мы проведем с помощью интегральной формулы Бляшке, которая, в свою очередь, является некоторой модификацией известной формулы Грина из курса математического анализа. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ и $\bar{y} = (u^1, u^2)$ – соответствующие односвязной области $\mathcal{D}$ плоскости (u^1, u^2) куски поверхности F и диаграммы вращений Y ее бесконечно малого изгибания. Обозначим через $\partial\mathcal{D}$ границу области $\mathcal{D}$. Очевидно равенство

$$\partial_2(\bar{r}, \partial_1\bar{y}, \bar{y}) - \partial_1(\bar{r}, \partial_2\bar{y}, \bar{y}) = 2(\bar{r}, \partial_1\bar{y}, \partial_2\bar{y}),$$

где круглыми скобками обозначено смешанное произведение трех векторов в E^3. Применяя к полученному равенству формулу Грина, находим

$$2\iint_{\mathcal{D}}(\bar{r}, \partial_1\bar{y}, \partial_2\bar{y})du^1du^2 = -\oint_{\partial\mathcal{D}}(\bar{r}, \partial_1\bar{y}, \bar{y})du^1 + (\bar{r}, \partial_2\bar{y})du^2.$$

Учитывая формулы (6), запишем эту формулу в виде

$$2\iint_F(\bar{r}, \bar{n})\Delta d\sigma = \oint_{\partial F}(\bar{r}, \bar{y}, d\bar{y}),$$

где $\Delta = -\beta\gamma = \alpha^2$, а интеграл слева является интегралом по поверхности F с границей ∂F. Это и есть формула Бляшке. Поместим начало координат в E^3 внутри овалоида F, а внутренние координаты на поверхности выберем так, чтобы вектор нормали $\bar{n}$ был направлен во внешнюю относительно F область пространства E^3. Тогда имеем $(\bar{r}, \bar{n}) > 0$ всюду на F. Так как $K > 0$, то внутренние координаты на поверхности F можно считать изотермически сопряженными, то есть $b_{11} = b_{22} > 0$ и $b_{12} = 0$ [1]. Но тогда из первой формулы системы (7) следует, что $\gamma = \beta$, и поэтому всюду на F имеем $\Delta = -\beta^2 - \alpha^2 \le 0$. Проведем на овалоиде какую-нибудь замкнутую простую гладкую кривую C, разбивающую овалоид на два односвязных куска F_1 и F_2. Запишем теперь формулу Бляшке применительно к каждому из кусков F_1 и F_2. Учтем, что $\partial F_1 \equiv C$, $\partial F_2 \equiv \bar{C}$, где контур $\bar{C}$ проходится в направлении, противоположном направлению обхода контура C. Поэтому, складывая соответственно левые и правые части полученных формул для поверхностей F_1 и F_2, получим

$$\iint_F (\bar{r}, \bar{n}) \Delta d\sigma \le 0.$$

Учитывая, что на поверхности F выполняются неравенства $(\bar{r}, \bar{n}) > 0$, $\Delta \le 0$, находим $\Delta \equiv 0$. Но тогда имеем $\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0$. Это означает, что рассматриваемый овалоид допускает только тривиальные бесконечно малые изгибания, он, таким образом, есть поверхность жесткая. В частности, поверхность шара, эллипсоиды суть поверхности жесткие.

Используя метод интегральных формул и теорию общих выпуклых поверхностей, А.В. Погорелов доказал следующий результат: *общая замкнутая выпуклая поверхность является жесткой вне ее плоских областей* [2].

Известны также некоторые классы жестких замкнутых невыпуклых поверхностей. Например, доказано, что тор (то есть поверхность бублика) является жесткой поверхностью. Этот результат обобщается на множество замкнутых поверхностей, называемых поверхностями типа T. Однако до сих пор представляет интерес описание новых классов жестких замкнутых поверхностей [3].

НЕЖЕСТКИЕ ЗАМКНУТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Ответ на вопрос, существуют ли замкнутые нежесткие поверхности, был дан в 1929 году С.Э. Кон-Фоссеном, который показал, что всякий трижды непрерывно дифференцируемый овалоид вращения может быть превращен в нежесткую замкнутую поверхность вращения путем продавливания вдоль любой ее параллели сколь угодно малого желоба (рис. 3). Ширина и глубина желоба не произвольны: они берутся из определенного запаса значений, среди которых имеются и сколь угодно малые. Это означает, что всякий овалоид вращения является предельной поверхностью для нежестких замкнутых гладких поверхностей вращения, то есть в любой достаточно малой пространственной окрестности овалоида вращения существуют нежесткие замкнутые гладкие поверхности вращения. Вопрос, обладает ли аналогичным свойством произвольный гладкий овалоид, до сих пор остается открытым.

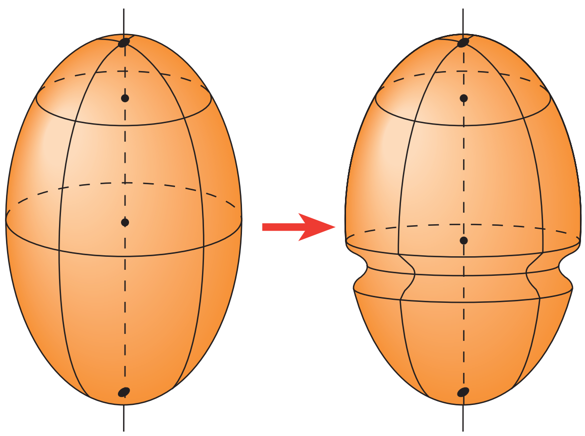

Рис. 3. *а* – жесткая замкнутая выпуклая поверхность вращения, *б* – нежесткая замкнутая поверхность вращения

Известно только, что нежесткие замкнутые поверхности – явление редкое. Все известные нежесткие замкнутые гладкие поверхности являются поверхностями вращения либо получены из них некоторыми преобразованиями (например, аффинными сжатиями).

О ЖЕСТКОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ

Если для замкнутых поверхностей нежесткие поверхности – явление исключительное, то поверхности с краем, как правило, являются поверхностями нежесткими. Вот почему для придания жесткости, например, сосуду, изготовленному из тонкой жести, вдоль его края делают специальные закругления.

Наиболее полно изучены бесконечно малые изгибания поверхностей с краем в случае $K > 0$. Методом исследования здесь выступает теория аналитических функций комплексного переменного. Проиллюстрируем этот метод на исследовании бесконечно малых изгибаний сферических кусков, ограниченных гладким краем.

Пусть F – односвязный кусок сферы единичного радиуса, заданный в стереографических координатах x, y уравнением

$$\bar{r} = \left\{ \frac{2x}{u}, \frac{2y}{u}, \frac{1 - x^2 - y^2}{u} \right\}, \qquad (x, y) \in \mathcal{D},$$

где $\mathcal{D}$ – некоторая односвязная плоская область, $u = 1 + x^2 + y^2$. Подсчет показывает, что

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{u^2}, \qquad b_{11} = b_{22}, \qquad g_{12} = b_{12} = 0,$$

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = -\Gamma^1_{22} = -\frac{2x}{u}, \qquad \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{12} = -\Gamma^2_{11} = -\frac{2y}{u}.$$

Обратимся к системе (7). Из первого уравнения этой системы находим $\gamma = \beta$. Тогда второе и третье уравнения системы (7) перепишутся в виде

$$u\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) = -4x\gamma + 4y\alpha,$$
$$u\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) = 4y\gamma + 4x\alpha. \quad (8)$$

Сделаем замену искомых функций в системе (8), положив $a = u^2\gamma$, $b = u^2\alpha$. Тогда система (8) принимает вид

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Систему (9) называют уравнениями Коши–Римана. Она показывает, что функция $w = a + ib$, i – мнимая единица, является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathcal{D}$. Это означает, что каждая аналитическая функция $w = w(z)$, $z \in \mathcal{D}$, отличная от тождественного нуля, порождает нетривиальное бесконечно малое изгибание куска сферы. Таким образом, доказана теорема: *всякий односвязный кусок сферы есть поверхность нежесткая*.

Установленное соответствие между множеством изгибающих полей куска сферы и множеством аналитических в области $\mathcal{D}$ функций дает возможность интерпретировать свойства аналитических функций как свойства куска сферы в отношении бесконечно малых изгибаний. Естественно возникает вопрос, при каких условиях, налагаемых на изгибающее поле вдоль края поверхности, последнюю можно сделать жесткой. Этот и подобные вопросы ждут окончательного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 510 с.

2. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. 760 с.

3. *Сабитов И.Х.* Локальная теория изгибаний поверхностей // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1989. Т. 48. С. 196–270.

* * *

Валентин Трофимович Фоменко, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и геометрии Таганрогского государственного педагогического института, член-корреспондент Российской академии естествознания, заслуженный деятель науки РФ. Область научных интересов: геометрия, дифференциальные и интегральные уравнения. Автор и соавтор более 150 научных работ, одной монографии и четырех учебных пособий для студентов.