WHAT A SMOOTH MANIFOLD IS

Yu. E. GLIKLIKH

The paper describes the concept of smooth manifold starting from its intuitive impression as 'a surface which is embedded into nowhere'. This approach allows to explain in a simple way the features of definition of this important object which is widely treated in contemporary mathematics and its applications. Some first notions of topology, necessary for the principal construction, are also introduced.

Описывается конструкция гладкого многообразия на основе наглядного представления его как поверхности, которая никуда не вложена. Такой подход позволяет проще изложить специфику определения этого важного понятия, широко используемого в современной нелинейной математике и ее приложениях. Также вводятся некоторые первоначальные понятия топологии, необходимые для основной конструкции.

© Гликлих Ю.Е., 1998

ЧТО ТАКОЕ ГЛАДКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Ю. Е. ГЛИКЛИХ

Воронежский государственный университет

ВВЕДЕНИЕ

Одним из базовых понятий современной математики является гладкое многообразие. Это формализация объекта, независимо возникшего во многих математических дисциплинах (а также в приложениях математики – математической физике, механике и других науках), на котором в окрестности каждой точки можно пользоваться (обобщенными) координатами, но отсутствует общая система координат, применимая сразу ко всем точкам. Из сказанного ясно, что это естественный и важный объект. Однако практика показывает, что освоение гладких многообразий связано для многих людей с трудностями, проистекающими из сложности формального определения. Между тем имеется чрезвычайно близкий к многообразию объект, наглядный и легко воспринимаемый всеми, – это поверхность. В статье мы объясняем понятие гладкого многообразия, используя его наглядное представление как поверхности, которая никуда не вложена, то есть вынута из объемлющего пространства. Несмотря на кажущуюся парадоксальность, предыдущая фраза строго математически корректна: имеется классическая теорема Уитни, утверждающая, что любое гладкое многообразие может быть вложено как поверхность в пространство достаточно большой размерности.

Изложение конструкции гладкого многообразия привлекательно для нас еще и потому, что позволяет коснуться некоторых первоначальных понятий такой математической дисциплины, как топология, причем мотивированно, что делает ясным их необходимость и естественность.

Прежде чем перейти к описанию гладкого многообразия, мы должны объяснить, зачем надо уметь рассматривать поверхность вне пространства. Например, напомним, что в общей теории относительности наше пространство–время является гладким многообразием размерности 4. Конечно, как и любое многообразие, его можно вложить как поверхность в некоторое пространство, но это пространство заранее никак не определено и никак не связано с физическим описанием пространства–времени.

Однако, даже если вложение многообразия возникает естественным образом, его использование может не помогать, а даже мешать. Проще всего это пояснить на примере классической задачи механики – движения твердого тела с закрепленной точкой. В этой задаче изучается некоторое твердое тело в трехмерном пространстве, вращающееся вокруг одной из точек пространства, которую мы назовем центром вращения. Мы рассмотрим только описание множества всех возможных положений твердого тела, называемого в механике конфигурационным пространством, оставляя в стороне описание траектории движения этого тела, которая представляет собой кривую на конфигурационном пространстве.

Рассмотрим в трехмерном пространстве три вектора, выходящие из центра вращения, перпендикулярные друг другу и имеющие единичную длину. Такой набор векторов называется ортонормированным репером. Прикрепим выбранный ортонормированный репер к телу. При вращении тела репер будет также вращаться, и каждому возможному положению тела будет взаимно однозначно соответствовать положение репера в пространстве, так что множество всех возможных положений тела (конфигурационное пространство) можно описать как множество всех ортонормированных реперов, приложенных в центре вращения и имеющих ту же ориентацию, что и первоначальный репер. Последнее множество хорошо известно, оно называется специальной ортогональной группой трехмерного пространства и обозначается SO(3).

Напомним, что каждый вектор трехмерного пространства может быть описан его тремя координатами. Из координат трех векторов, образующих ортонормированный репер, нетрудно составить матрицу размером 3×3. Отсюда видно, что SO(3) является подмножеством в множестве всех (3×3)-матриц, которое обычно обозначают символом L(3). Поскольку каждая матрица из L(3) содержит девять чисел, то для описания L(3) нужно девять координат, то есть L(3) представляет собой девятимерное пространство. Для нас важен следующий результат из линейной алгебры: SO(3) является трехмерной поверхностью в указанном выше девятимерном пространстве.

Выскажем весьма обоснованное предположение, что ни один читатель не представляет наглядно трехмерные поверхности в девятимерном пространстве. Таким образом, наглядное описание SO(3) в виде поверхности нисколько не помогает. Но этого мало, на самом деле оно даже мешает. Действительно, теперь, чтобы задать кривую на SO(3), описывающую движение тела, мы вынуждены использовать девять уравнений для ее девяти координат. Но ведь можно задать ту же кривую только тремя уравнениями на SO(3), то есть шесть уравнений, по сути дела, лишние, без них можно обойтись!

Таким образом, разумно забыть об объемлющем пространстве и рассматривать SO(3) самостоятельно (вынуть его из пространства). При этом, конечно, мы не должны потерять свойства SO(3) как поверхности, то есть научиться их описывать и использовать без объемлющего пространства.

Структура статьи такова. Сначала мы расскажем, как “правильно” надо задавать двумерные поверхности в трехмерном пространстве. Затем мы попытаемся повторить это построение в случае, когда объемлющее пространство отсутствует (а сама “поверхность” имеет размерность n). Мы выделим три ключевых момента при описании поверхностей и многообразий: задание некоторого множества, описание его непрерывной структуры и, наконец, гладкости. В случае поверхности эти три шага весьма просты. Для случая многообразия мы покажем, что именно не проходит на каждом шаге и как обойти возникшие трудности. В дополнение мы приводим некоторые понятия топологии, нужные для полноты изложения.

Мы предполагаем известным понятие частной производной, по-видимому выходящее за рамки школьного курса. Для читателя, знакомого с понятиями непрерывности и дифференцируемости в объеме старших классов школы, не составит труда прочитать определение в любом учебнике по высшей математике или математическому анализу.

ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность в трехмерном пространстве – это множество, называемое носителем, для которого выполняются дополнительные свойства. Зафиксируем это обстоятельство.

(1П) В трехмерном пространстве выбрано множество M, называемое носителем поверхности.

Перейдем к описанию условий, которым должен удовлетворять носитель. Напомним, что гомеоморфизм – это отображение, для которого выполнены три свойства: а) оно взаимно однозначно; б) оно непрерывно; в) обратное к нему отображение также непрерывно (отметим, что существование обратного отображения следует из взаимной однозначности).

(2П) Для каждой точки x из M существуют ее окрестность U в M и гомеоморфизм $r(u, \upsilon)$ некоторого открытого круга V на U, где u и υ – координаты на V. Пара (V, r) называется картой. Набор карт, такой, что каждая точка из M попадает хотя бы в одну карту, называется атласом.

Поясним все это на примере поверхности земного шара. Для некоторой точки земной поверхности выберем достаточно малую ее окрестность U, такую, что ее целиком можно сфотографировать с самолета или в крайнем случае со спутника. Понятно, что подобная окрестность существует. Фотография V окрестности U вместе с проекцией V на U (обратная операция по отношению к фотографированию – это и есть $r(u, \upsilon)$) и является картой. Действительно, каждой точке в U соответствует единственная точка из V и, наоборот, и соответствие точек из U точкам из V непрерывно, так же как и обратное соответствие. При этом карта зависит не только от выбора области U, но и от выбора метода фотографирования, то есть включение $r(u, \upsilon)$ в понятие карты необходимо. В точном соответствии с географическими терминами набор карт, описывающих всю земную поверхность, называется атласом земного шара. U и V можно не различать, полагая, что мы растянули V и наложили на U. Отметим, что прямые координатные линии в V при переходе в U искривятся, но не перестанут исполнять роль координат. Их называют криволинейными координатами.

Для того чтобы описать оставшееся (последнее) условие, нам понадобится понятие диффеоморфизма. Рассмотрим некоторое отображение F, действующее из области W n-мерного пространства E в N-мерное пространство G. Это означает, что каждый вектор X из W имеет n координат: $X = (x^1, x^2, ..., x^n)$, а $F(X)$, принадлежащий G, имеет N координат: $F(X) = (y^1, y^2, ..., y^N)$, и при этом каждое y^i является функцией от $x^1, x^2, ..., x^n$. Отображение F называется гладким, если для каждого y^i существуют и непрерывны все его частные производные любого порядка (часто вместо слова "гладкое" говорят "бесконечно дифференцируемое"). Отображение называется C^∞-диффеоморфизмом, если оно гомеоморфизм и к тому же оно гладко и обратное к нему гладко.

(3П) Гомеоморфизм $r(u, \upsilon)$ является C^∞-диффеоморфизмом.

Здесь необходимы некоторые пояснения. Отображение $r(u, \upsilon)$ действует из области V двумерного пространства в трехмерное, и, таким образом, к нему применимо данное выше определение гладкости. С обратным отображением r^{-1} ситуация сложнее. Оно определено только на U, которое не является областью в трехмерном пространстве (напомним, что U выбрано как окрестность точки на M). Поэтому для r^{-1} мы требуем существования и непрерывности всех частных производных только по направлениям вдоль M (остальные просто не определены).

Описание правильного способа задания гладкой поверхности завершено. Однако для дальнейшего (да и для лучшего понимания построения) нужно ввести еще одно понятие. Рассмотрим некоторый атлас поверхности M. Так как его карты покрывают все M, то некоторые его карты пересекаются, то есть некоторые точки из M попадают сразу в несколько карт. Например, в атласе земного шара карта европейской части России обязательно включает кусочек Украины и наоборот, то есть территории по обе стороны границы Украины с Россией входят как минимум в две карты атласа. Формально эта ситуация описывается следующим образом. Пусть имеются, с одной стороны, U_1 и V_1, связанные посредством $r_1(u_1, \upsilon_1)$, и, с другой – U_2 и V_2, связанные посредством $r_2(u_2, \upsilon_2)$, и при этом U_1 и U_2 имеют непустое пересечение – область Ω в M. Обозначим область $r_1^{-1}(\Omega)$ в V_1 через Ω_1 и соответственно $r_2^{-1}(\Omega)$ в U_2 через Ω_2. Рассмотрим сложное (составное) отображение $r_2^{-1}(r_1)$, переводящее Ω_1 на Ω_2, то есть сначала r_1 переводит Ω_1 на Ω, а затем r_2^{-1} переводит Ω на Ω_2. Отображение $r_2^{-1}(r_1)$ называется заменой координат. Действительно, для точек из Ω оно преобразует их координаты (u_1, υ_1), заданные посредством r_1 в V_1, в их же координаты (u_2, υ_2), заданные посредством r_2 в V_2.

(3'П) Для любых пар пересекающихся карт соответствующие замены координат являются гладкими отображениями.

Предложение (3'П) следует из того, что и r_1 и r_2^{-1} по (3П) являются гладкими, то есть сложное отображение $r_2^{-1}(r_1)$ также гладко. Кстати, мы ввели номер 3' (а не, скажем, 4), так как это предложение относится к гладкости, то есть к третьему шагу.

Подведем итог: чтобы задать гладкую двумерную поверхность в трехмерном пространстве, надо осуществить шаг (1П) – задать множество, для которого бы выполнялись условия (2П) и (3П), и тогда, в частности, будет выполнено свойство (3'П).

МНОГООБРАЗИЯ

Теперь мы попробуем модифицировать конструкцию поверхности так, чтобы исключить использование объемлющего пространства. Прежде всего займемся первым шагом. Рассмотрим некоторое множество M. Нам нужно сразу потребовать, чтобы это множество удовлетворяло некоторым дополнительным свойствам, поскольку в пункте (1П) на множество M наложено очень сильное условие, что оно лежит в трехмерном пространстве и, таким образом, наследует многие свойства указанного пространства (на это обстоятельство обычно не обращают внимание). Оно наследует даже слишком много сверх необходимого. Нам нужно только, чтобы для множества M было осмысленным условие типа (2П). Для этого надо хотя бы, чтобы корректно были определены понятие непрерывного отображения со значениями в M, понятие окрестности точки в M и т.д.

Современной математике известно, что минимальное условие на множество, при выполнении которого указанные понятия корректно определены, состоит в том, что множество должно быть топологическим пространством. В дополнении кратко объясняем, что это такое. Однако при первом прочтении достаточно поверить, что если M – топологическое пространство, то мы можем иметь дело с окрестностями точек, в этом случае определено понятие гомеоморфизма и т.д. Во всяком случае множество, лежащее в трехмерном пространстве, наследует топологию, то есть является топологическим пространством, причем обладающим многими дополнительными свойствами. Некоторые из указанных свойств нам необходимы. Например, в трехмерном пространстве очевидным образом выполняется следующее свойство, называемое отделимостью: если выбрать любую пару (несовпадающих!) точек, то для каждой из них можно выбрать по окрестности так, чтобы эти окрестности не пересекались. Отметим, что существуют топологические пространства, не обладающие этим свойством (в дополнении приведен пример подобного пространства). Потребуем, чтобы для M выполнялось свойство отделимости. Без выполнения этого свойства дальнейшая конструкция будет корректной, однако вместо поверхности, которая никуда не вложена, может получиться совершенно чудовищный, сложно устроенный объект.

Итак, шаг (1П) заменяется на

(1М) Задано топологическое пространство M, обладающее свойством отделимости.

После сказанного понятно, что второй шаг изменяется лишь немного. Напомним, что мы хотим определить понятие многообразия произвольной размерности n (не только 2, как выше). Так что аналог условия (2П) имеет вид

(2М) Для каждой точки x из M существуют ее окрестность U в M, открытый шар V в линейном пространстве размерности n и гомеоморфизм φ шара V на U. Пара (V, φ) называется картой. Набор карт, такой, что каждая точка из M попадает хотя бы в одну карту, называется атласом.

Наконец мы добрались до завершающего шага и обнаружили, что никакого аналога условию (3П) в рассматриваемой ситуации в принципе не может быть. Действительно, понятие дифференцируемости (гладкости) и производной вообще определено только для отображений областей линейных пространств (например, для отображений из области двумерного пространства в трехмерное пространство, как выше), в то время как сейчас мы имеем дело с отображением из области V n-мерного пространства в топологическое (но не линейное!) пространство M. Поэтому мы не можем наложить на φ условие гладкости, то есть потребовать, чтобы φ было диффеоморфизмом.

Однако аналог утверждения (3'П) может иметь место. Рассмотрим U_1 и V_1, связанные посредством φ_1, и U_2 и V_2, связанные посредством φ_2, и, как и выше, обозначим $\varphi_1^{-1}(\Omega)$ в V_1 через Ω_1 и соответственно $\varphi_2^{-1}(\Omega)$ в U_2 через Ω_2. Замена координат $\varphi_2^{-1}(\varphi_1)$ действует из Ω_1 в Ω_2, то есть из одной области n-мерного пространства в другую, и поэтому это сложное отображение может быть дифференцируемо несмотря на то, что по отдельности для составляющих его отображений понятие дифференцируемости не определено. Оказывается, гладкости замен координат нам достаточно. Сформулируем последнее условие.

(3М) Все замены координат являются гладкими отображениями.

Итак, чтобы задать гладкое многообразие размерности n, надо задать топологическое пространство, обладающее свойством отделимости (шаг (1М)), такое, что выполняются условия (2М) и (3М).

Теорема Уитни. *Любое гладкое многообразие размерности n может быть вложено как гладкая поверхность в линейное пространство размерности* $2n + 1$.

Отметим, что теорема Уитни не запрещает, чтобы некоторые многообразия можно было вложить в пространство меньшей размерности (которое, понятно, вкладывается вместе с поверхностью в пространство размерности $2n + 1$). Например, обычная двумерная сфера вложена в трехмерное пространство, тогда как при $n = 2$ получаем $2n + 1 = 5$. Теорема Уитни утверждает, что, каково бы ни было двумерное многообразие, в пятимерное пространство его всегда можно вложить.

Приведем несколько примеров двумерных многообразий, некоторые из которых нельзя вложить в трехмерное пространство. Рассмотрим на плоскости прямоугольник $ABCD$ (сторона AB параллельна стороне CD и сторона AD параллельна стороне BC). Кроме того, рассмотрим бесконечную полосу, заключенную между бесконечными в обе стороны продолжениями сторон AB и CD. Приклеим сторону AB прямоугольника к стороне CD так, чтобы A совпало с D, а B – с C. Получится цилиндр. Теперь приклеим AB к CD так, чтобы A совпало с C, а B – с D. То, что получится, называется лентой Мёбиуса. Попробуем произвести аналогичные склейки с полосой. В первом случае получится бесконечный цилиндр, а во втором – бесконечное продолжение ленты Мёбиуса, известное как лист Мёбиуса. Наглядно видно, что лист Мёбиуса не вкладывается в трехмерное пространство как поверхность – при продолжении ленты Мёбиуса возникает самопересечение.

Вернемся к цилиндру, полученному склеиванием прямоугольника. На верхнем основании точка A склеилась с точкой D, на нижнем B – с C. Приклеим нижнее основание к верхнему так, чтобы единая точка A и D совпала с единой точкой B и C и чтобы при переходе от A к D вокруг нижнего основания мы двигались от B к C вокруг верхнего. Получится поверхность, называемая тором (поверхность бублика). А теперь попробуйте (хотя бы мысленно) приклеить нижнее основание к верхнему так, чтобы точки по-прежнему совпали, но при переходе от A к D вокруг нижнего основания мы двигались бы от C к B вокруг верхнего. Без самопересечения поверхности этого сделать не удастся, то есть ее нельзя вложить в трехмерное пространство. Однако в пространстве большей размерности это сделать можно. Полученное многообразие называется бутылкой Клейна.

Важно отметить, что все наши построения приводят к многообразиям независимо от того, удается или нет вложить их в трехмерное пространство. Наличие карт и выполнение всех необходимых условий совершенно очевидны для точек внутри прямоугольника (полосы) – сама внутренность и образует карту. Чтобы понять, как можно найти карту для точек на множестве раздела, достаточно заметить, что это множество можно сдвинуть по многообразию, так что “плохие” точки окажутся в “новой” внутренности.

Теперь покажем, как можно работать с многообразием вместо поверхности. Для примера рассмотрим определение дифференцируемости числовой функции в точке.

Пусть на многообразии M задана числовая функция f, то есть каждой точке x из M поставлено в соответствие вещественное число $f(x)$. Предполагается, что f непрерывна (ниже в дополнении дано точное определение). Пусть (V_1, φ_1) – карта. Для точки x из V_1 рассмотрим точку $x_{V_1} = \varphi_1^{-1}x$ в V_1 (выражение для x в карте). Рассмотрим числовую функцию $f(\varphi_1)$ на V_1, точке x_{V_1} она ставит в соответствие число $f(x)$. Поскольку функция $f(\varphi_1)$ определена на области V_1 линейного пространства, для нее (в отличие от f) применимо понятие производных.

Определение. Функция *f дифференцируема в точке x*, если найдется карта (V_1, φ_1), такая, что x лежит в U_1 и функция $f(\varphi_1)$ дифференцируема в точке x_{V_1}.

Покажем, что это определение корректно, то есть не зависит от случайного выбора карты (V_1, φ_1). Пусть имеется другая карта (V_2, φ_2), для которой x лежит в U_2. Обозначим $\varphi_2^{-1}x$ через x_{V_2}. Тогда нетрудно видеть, что в окрестности точки x_{V_2} имеет место представление: $f(\varphi_2) = f(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\varphi_2)))$, то есть $f(\varphi_2)$ – сложная функция, составленная из $f(\varphi_1)$ и $\varphi_1^{-1}(\varphi_2)$. Поскольку замена координат $\varphi_1^{-1}(\varphi_2)$ гладкая по определению, а $f(\varphi_1)$ дифференцируема в x_{V_1} по условию, то $f(\varphi_2)$ дифференцируема в x_{V_2}.

ДОПОЛНЕНИЕ

Некоторые понятия топологии

В математическом анализе широко используется понятие открытого множества, например, на числовой прямой: множество называется открытым, если для любой его точки достаточно малый интервал с центром в этой точке целиком входит в это множество. Для открытых множеств выполняются два важных свойства: объединение любого (даже бесконечного) набора открытых множеств есть открытое множество и пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Оказывается, если некоторый набор множеств обладает этими свойствами, то с множествами из указанного набора можно работать во многом так же, как с обычными открытыми множествами. Дадим точные определения.

Рассмотрим произвольное множество X. Выделим набор τ его подмножеств, обладающий следующими свойствами: (i) X и пустое множество входят в τ; (ii) объединение любого числа множеств из τ принадлежит τ; (iii) пересечение конечного числа множеств из τ принадлежит τ. Если набор τ задан, X называется топологическим пространством, набор τ называется топологией, а входящие в τ множества – открытыми.

Примером топологического пространства является числовая прямая с множествами, открытыми в обычном смысле. Действительно, вся числовая прямая очевидным образом открыта, пустое множество включают в число открытых по определению (это непротиворечиво: поскольку в пустом множестве нет точек, то можно считать, что каждая из них (!) входит в пустое множество с некоторым интервалом). Как уже сказано выше, свойства (ii) и (iii) выполнены. Приведем еще два примера. На любом X рассмотрим топологию, в которой всего два множества: всё X и пустое. Такая топология называется тривиальной. Противоположная ситуация: на любом X включим в топологию вообще все подмножества X, включая само X и пустое подмножество. Эта топология называется дискретной.

Топология может наследоваться. Например, в трехмерном пространстве имеется топология, состоящая из обычных открытых множеств (аналогично случаю числовой прямой). Тогда на поверхности возникает топология, в которой открытыми множествами являются пересечения с этой поверхностью множеств, открытых в пространстве.

Окрестностью точки в топологическом пространстве называется любое открытое множество, содержащее указанную точку. Очевидно, что для тривиальной топологии свойство отделимости отсутствует: в этой топологии есть ровно одно непустое открытое множество – всё X, поэтому всё X будет единственной возможной окрестностью для любой точки и для произвольной пары точек их любые окрестности просто совпадают.

В топологических пространствах корректно определено понятие непрерывного отображения. Отображение F из топологического пространства X в другое топологическое пространство называется непрерывным в точке x, если для любой окрестности U точки $F(x)$ существует окрестность W точки x, такая, что для любого y из W точка $F(y)$ принадлежит U. Сравните это определение с привычным определением непрерывности числовой функции одного переменного.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Милнор Дж.*, *Уоллес А.* Дифференциальная топология: Начальный курс. М.: Мир,1972. 277 с.

2. *Борисович Ю.Г.*, *Близняков Н.М.*, *Израилевич Я.А.*, *Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М.: Наука, 1995. 416 с.

* * *

Юрий Евгеньевич Гликлих, доктор физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и топологических методов анализа Воронежского государственного университета. Область научных интересов: глобальный анализ, стохастический анализ, математическая физика. Автор трех монографий и более 80 научных статей.