1

Функции на евклидовом пространстве

НОРМА И ВНУТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Евклидово n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ определяется как множество всех n-членных последовательностей $(x^1, \ldots, x^n)$ вещественных чисел x^i („1-членная последовательность чисел" есть просто число, а $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ — множество всех вещественных чисел). Элементы множества $\mathbf{R}^n$ часто называются его точками, а $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ — прямой, плоскостью и пространством соответственно. Если через x обозначен элемент из $\mathbf{R}^n$, т. е. последовательность из n чисел, то i-е число обозначается x^i, так что

$$x = (x^1, \ldots, x^n).$$

Точки из $\mathbf{R}^n$ часто называются также векторами, ибо $\mathbf{R}^n$, наделенное операциями

$$x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$$

и

$$ax = (ax^1, \ldots, ax^n),$$

действительно есть векторное пространство (над полем вещественных чисел, n-мерное). В этом векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ имеется понятие длины вектора x, обычно называемой *нормой* $|x|$ этого вектора и определяемой формулой

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Если $n = 1$, то $|x|$ — обычная абсолютная величина числа x. Очень важна связь между нормой и структурой векторного пространства $\mathbf{R}^n$.

1.1. Теорема. *Если $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $a \in \mathbf{R}$, то*

(1) $|x| \geqslant 0$, *причем* $|x| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = (0, \ldots, 0)$;

(2) $\left|\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right| \leqslant |x| \cdot |y|$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы*;

(3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

(4) $|ax| = |a| \cdot |x|$.

Доказательство.

(1) Предоставляется читателю.

(2) Если x и y линейно зависимы, то очевидно, что имеет место равенство. Пусть x и y линейно независимы, т. е. $\lambda y - x \neq (0, \ldots, 0)$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$. Тогда

$$0 < |\lambda y - x|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda y^i - x^i)^2 =$$

$$= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} x^i y^i + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2.$$

Поэтому квадратичный трехчлен относительно λ, стоящий в правой части, не имеет вещественных корней. Значит, его дискриминант отрицателен, т. е. $4\left(\sum_{i=1}^{n} x^i y^i\right)^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 < 0$.

(3) $$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i + y^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x^i y^i \leqslant |x^2| + |y|^2 + 2|x| \cdot |y| = (|x| + |y|)^2.$$

(4) $$|ax| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (ax^i)^2} = \sqrt{a^2 \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2} = |a| \cdot |x|. \blacksquare$$ [1]

Выражение $\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, входящее в (2), называется *внутренним произведением* [2] векторов x и y и обозначается

[1] Здесь и в дальнейшем знаком ▮ обозначается конец доказательства. — *Прим. перев.*

[2] В нашей литературе общепринят термин „скалярное произведение“, однако мы предпочитаем сохранить терминологию автора. Причины этого станут вполне понятными при чтении гл. 4. — *Прим. перев.*

$\langle x, y\rangle$. Перечислим важнейшие свойства внутреннего произведения.

1.2. Теорема. *Если* x, x_1, x_2 *и* y, y_1, y_2 — *векторы из* $\mathbf{R}^n$ *и* $a\in\mathbf{R}$, *то*

(1) $\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle$ (*симметричность*);

(2) $\langle ax, y\rangle=\langle x, ay\rangle=a\langle x, y\rangle$,

$\langle x_1+x_2, y\rangle=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle$,

$\langle x, y_1+y_2\rangle=\langle x, y_1\rangle+\langle x, y_2\rangle$

(*билинейность*);

(3) $\langle x, x\rangle\geqslant 0$, *причем* $\langle x, x\rangle=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=0$ (*положительная определенность*);

(4) $|x|=\sqrt{\langle x, x\rangle}$;

(5) $\langle x, y\rangle=\dfrac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}$ (*поляризационное тождество*).

Доказательство.

(1) $\langle x, y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x^iy^i=\sum\limits_{i=1}^{n}y^ix^i=\langle y, x\rangle$.

(2) В силу (1) достаточно доказать, что

$$\langle ax, y\rangle=a\langle x, y\rangle,$$
$$\langle x_1+x_2, y\rangle=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle.$$

Это вытекает из равенств

$$\langle ax, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}(ax^i)y^i=a\sum_{i=1}^{n}x^iy^i=a\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x_1+x_2, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(x_1^i+x_2^i\right)y^i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_1^iy^i+\sum_{i=1}^{n}x_2^iy^i=\langle x_1, y\rangle+\langle x_2, y\rangle.$$

(3) и (4) предоставляем читателю.

(5) В силу (4)

$$\frac{|x+y|^2-|x-y|^2}{4}=\frac{1}{4}[\langle x+y, x+y\rangle-\langle x-y, x-y\rangle]=$$
$$=\frac{1}{4}[\langle x, x\rangle+2\langle x, y\rangle+\langle y, y\rangle-(\langle x, x\rangle-2\langle x, y\rangle+$$
$$+\langle y, y\rangle)]=\langle x, y\rangle. \blacksquare$$

В заключение этого параграфа — несколько важных замечаний относительно обозначений. Вектор $(0, \ldots, 0)$ будет обычно обозначаться просто 0. *Стандартным базисом* в $\mathbf{R}^n$ будет называться базис, образованный векторами $e_1, \ldots, e_n$, где $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ с 1 на i-м месте и 0 на всех остальных.

Под матрицей линейного отображения $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ относительно стандартных базисов в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ понимается $(m \times n)$-матрица $A = (a_{ij})$, j-й столбец которой образован коэффициентами разложения вектора $T(e_j)$:

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i.$$

Если $S\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$ имеет $(p \times m)$-матрицу B, то матрицей для $S \circ T$ будет $(p \times n)$-матрица BA (здесь $(S \circ T)(x) = S(T(x))$; в большинстве книг по линейной алгебре вместо $S \circ T$ пишут просто ST). Для нахождения $T(x)$ достаточно вычислить элементы $(m \times 1)$-матрицы

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix};$$

тогда $T(x) = (y^1, \ldots, y^m)$.

Через (x, y), где $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^m$, мы условимся обозначать вектор $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m) \in \mathbf{R}^{n+m}$. Это весьма упростит запись многих формул.

Задачи

1.1*. Доказать, что $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x^i|$.

1.2. Когда в утверждении (3) теоремы 1.1 имеет место равенство? (Указание: проследить ход доказательства; ответом не будет „когда x и y линейно зависимы".)

1.3. Доказать, что $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. Когда имеет место равенство?

1.4. Доказать, что $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

1.5. Величина $|x-y|$ называется *расстоянием* между x и y. Доказать и геометрически истолковать „неравенство треугольника" $|z-x| \leqslant |z-y| + |y-x|$.

1.6. Пусть f и g — интегрируемые функции на отрезке $[a, b]$.

а) Доказать, что $\left|\int\limits_a^b fg\right| \leqslant \left(\int\limits_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b g^2\right)^{1/2}$. (Указание: рассмотреть отдельно случаи, когда $0 = \int\limits_a^b (f-\lambda g)^2$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ и когда $\int\limits_a^b (f-\lambda g)^2 > 0$ для всех $\lambda \in \mathbf{R}$.)

б) Пусть в а) имеет место равенство. Означает ли это, что $f = \lambda g$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$? А если функции f и g непрерывны?

в) Показать, что теорема 1.1 (2) — частный случай утверждения а).

1.7. Говорят, что линейное отображение $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *сохраняет норму*, если $|T(x)| = |x|$, и *сохраняет внутреннее произведение*, если $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

а) Доказать, что T сохраняет норму тогда и только тогда, когда T сохраняет внутреннее произведение.

б) Доказать, что всякое такое линейное отображение T взаимно однозначно и теми же свойствами обладает T^{-1}.

1.8. Пусть $x, y \in \mathbf{R}^n$ — ненулевые векторы. *Угол* $\angle(x, y)$ между x и y определяется как $\arccos \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x|\cdot|y|}$; это определение имеет смысл в силу теоремы 1.1 (2). Говорят, что линейное отображение T *сохраняет углы*, если T взаимно однозначно и $\angle(Tx, Ty) = \angle(x, y)$ для всех $x, y \neq 0$.

а) Доказать, что если T сохраняет норму, то T сохраняет углы.

б) Доказать, что если существуют такие базис $x_1, \ldots, x_n$ в $\mathbf{R}^n$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что $Tx_i = \lambda_i x_i$, то T сохраняет углы тогда и только тогда, когда все λ_i равны между собой.

в) Описать все линейные отображения $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, сохраняющие углы.

1.9. Пусть $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix},$$

где $0 \leqslant \theta < \pi$. Показать, что T сохраняет углы и $\angle(x, Tx) = \theta$ для всех $x \neq 0$.

1.10*. Показать, что для всякого линейного отображения $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ существует такое число M, что $|T(h)| \leqslant M|h|$

для всех $h \in \mathbf{R}^n$. (Указание: оценить $|T(h)|$ с помощью $|h|$ и коэффициентов матрицы T.)

1.11. Показать, что если $x, y \in \mathbf{R}^n$ и $z, w \in \mathbf{R}^m$, то $\langle (x, z), (y, w) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, w \rangle$ и $|(x, z)| = \sqrt{|x|^2 + |z|^2}$. Напомним, что (x, z) и (y, w) — точки из $\mathbf{R}^{n+m}$.

1.12*. Пусть $(\mathbf{R}^n)^*$ — пространство, сопряженное к векторному пространству $\mathbf{R}^n$. Определим для каждого $x \in \mathbf{R}^n$ функционал $\varphi_x \in (\mathbf{R}^n)^*$ формулой $\varphi_x(y) = \langle x, y \rangle$, и пусть T — отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в $(\mathbf{R}^n)^*$, определенное формулой $T(x) = \varphi_x$. Показать, что T — взаимно однозначное линейное отображение, и вывести отсюда, что всякое $\varphi \in (\mathbf{R}^n)^*$ есть φ_x для однозначно определенного $x \in \mathbf{R}^n$.

1.13*. Элементы $x, y \in \mathbf{R}^n$ называются *перпендикулярными* (или *ортогональными*), если $\langle x, y \rangle = 0$. Доказать, что если x и y перпендикулярны, то $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

ПОДМНОЖЕСТВА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Замкнутый интервал $[a, b]$ обладает естественным аналогом в $\mathbf{R}^2$. Это *замкнутый прямоугольник* $[a, b] \times [c, d]$, определяемый как множество всех пар (x, y) с $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$. Если $A \subset \mathbf{R}^m$ и $B \subset \mathbf{R}^n$, то произведение $A \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ определяется как множество всех $(x, y) \in \mathbf{R}^{m+n}$ с $x \in A$ и $y \in B$. В частности, $\mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$. Если $A \subset \mathbf{R}^m$, $B \subset \mathbf{R}^n$ и $C \subset \mathbf{R}^p$, то $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ и оба произведения обозначаются просто $A \times B \times C$; это распространяется на произведение любого числа множеств. Множество $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым параллелепипедом* в $\mathbf{R}^n$, а множество $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset \mathbf{R}^n$ — *открытым параллелепипедом*. В более общем случае множество $U \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым* (рис. 1.1), если для всякого $x \in U$ существует такой открытый параллелепипед A, что $x \in A \subset U$.

Множество $C \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым* в $\mathbf{R}^n$, если $\mathbf{R}^n \setminus C$ открыто. Например, каждое множество C, содержащее только конечное число точек, замкнуто. Предоставим читателю доказать, что замкнутый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ действительно является замкнутым множеством.

Для множества $A \subset \mathbf{R}^n$ и точки $x \in \mathbf{R}^n$ всегда должна осуществляться одна из трех возможностей (рис. 1.2).

1. Существует такой открытый параллелепипед B, что $x \in B \subset A$.

2. Существует такой открытый параллелепипед B, что $x \in B \subset \mathbf{R}^n \setminus A$.

3. Всякий открытый параллелепипед B, содержащий x, содержит как точки из A, так и точки из $\mathbf{R}^n \setminus A$.

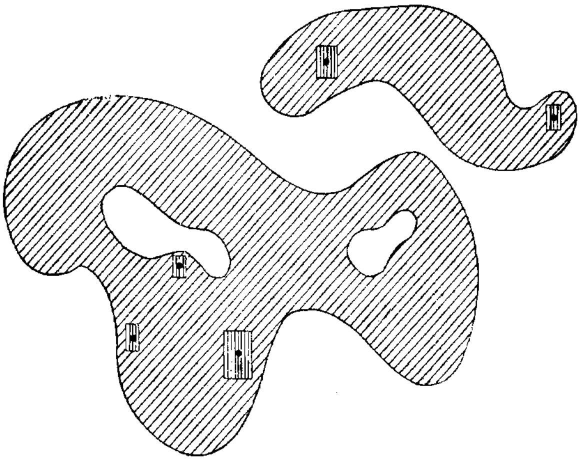

Рис. 1.1.

Точки x, обладающие свойством 1, образуют *внутренность* множества A, обладающие свойством 2 — *внешность* множества A, а обладающие свойством 3 — *границу* множества A. Задачи 1.16—1.18 показывают, что эти термины могут подчас приобретать неожиданный смысл.

Нетрудно видеть, что внутренность всякого множества A есть открытое множество; то же верно для внешности A, ибо она есть не что иное, как внутренность $\mathbf{R}^n \setminus A$. Таким образом (задача 1.14), их объединение открыто, так что граница, являясь его дополнением, должна быть замкнутой.

Семейство $\mathfrak{S}$ открытых множеств называется *открытым покрытием* множества A (или, кратко, *покрывает* A), если каждая точка $x \in A$ принадлежит некоторому множеству семейства $\mathfrak{S}$. Например, если $\mathfrak{S}$ — семейство всех открытых интервалов $(a, a+1)$, где a пробегает $\mathbf{R}$, то $\mathfrak{S}$ — покрытие множества $\mathbf{R}$. Очевидно, никакое конечное число множеств из $\mathfrak{S}$ не покрывает $\mathbf{R}$, как и любое его неограниченное подмножество. Подобная ситуация может встретиться и для ограниченных множеств. Так, например, если $\mathfrak{S}$ — семейство всех открытых интервалов $(1/n, 1-1/n)$, где $n=1, 2, \ldots$, то $\mathfrak{S}$ — открытое покрытие интервала $(0, 1)$, но снова никакое конечное число множеств из $\mathfrak{S}$ не покрывает $(0, 1)$. Хотя в этом явлении и нет ничего особенно страшного, все же множества, для которых такая

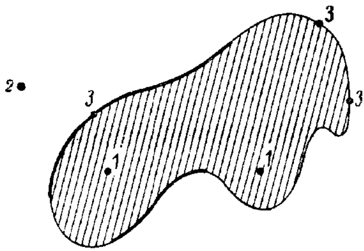

Рис. 1.2.

ситуация не может иметь места, настолько важны, что получили специальное название: множество A называется *компактным*, если всякое его открытое покрытие $\mathfrak{S}$ содержит конечное подсемейство, также покрывающее A.

Очевидно, что каждое конечное множество компактно; то же верно и для бесконечного множества A, состоящего из нуля и чисел $1/n$ для всех положительных целых n (действительно, если $\mathfrak{S}$ — покрытие, то $0 \in U$ для некоторого открытого множества U из $\mathfrak{S}$, и только конечное число остальных точек из A не принадлежит U, а для покрытия каждой из них достаточно по одному множеству из $\mathfrak{S}$).

Установление компактности множеств сильно упрощается благодаря следующим результатам, из которых лишь первый в какой-то мере глубок.

1.3. Теорема Бореля — Лебега. *Замкнутый интервал $[a, b]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое покрытие $[a, b]$. Рассмотрим множество

$$A = \{x\colon a \leqslant x \leqslant b \text{ и } [a, x] \text{ покрыт конечным числом множеств из } \mathcal{O}\}.$$

Заметим, что $a \in A$ и что A, очевидно, ограничено сверху (числом b). Нам нужно показать, что $b \in A$. Для этого достаточно рассмотреть число $\alpha = \sup A$ и доказать, что $\alpha \in A$ и $\alpha = b$.

Так как $\mathcal{O}$ — покрытие, то $\alpha \in U$ для некоторого U из $\mathcal{O}$. Тогда все точки некоторого интервала с правым концом α также принадлежат U (см. рис. 1.3). Так как

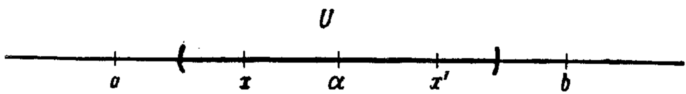

Рис. 1.3.

α — верхняя грань множества A, то в этом интервале найдется точка $x \in A$. Таким образом, $[a, x]$ покрыт некоторым конечным числом множеств из $\mathcal{O}$, а $[x, \alpha]$ — уже одним множеством U. Следовательно, $[a, \alpha]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathcal{O}$, и $\alpha \in A$.

Чтобы доказать, что $\alpha = b$, предположим противное. Пусть $\alpha < b$. Тогда существует такая точка x' между α и b, что $[\alpha, x'] \subset U$. Так как $\alpha \in A$, то интервал $[a, \alpha]$ покрыт конечным числом множеств из $\mathcal{O}$, интервал же $[\alpha, x']$ покрыт множеством U. Следовательно, $x' \in A$, в противоречии с тем, что α — верхняя грань множества A. ▮

Если $B \subset \mathbf{R}^m$ компактно и $x \in \mathbf{R}^n$, то легко видеть, что $\{x\} \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ тоже компактно. Справедливо и более сильное утверждение.

1.4. Теорема. *Если B компактно и $\mathcal{O}$ — открытое покрытие множества $\{x\} \times B$, то существует такое открытое множество $U \subset \mathbf{R}^n$, содержащее x, что $U \times B$ покрыто конечным числом множеств из $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Так как $\{x\} \times B$ компактно, то мы можем с самого начала считать, что $\mathcal{O}$ — конечное покрытие, и нужно только найти такое открытое множество U, чтобы $U \times B$ покрывалось семейством $\mathfrak{S}$.

Для всякого $y \in B$ точка (x, y) лежит в некотором множестве W из $\mathfrak{S}$. Так как W открыто, то $(x, y) \subset U_y \times V_y \subset W$ для некоторого открытого параллелепипеда

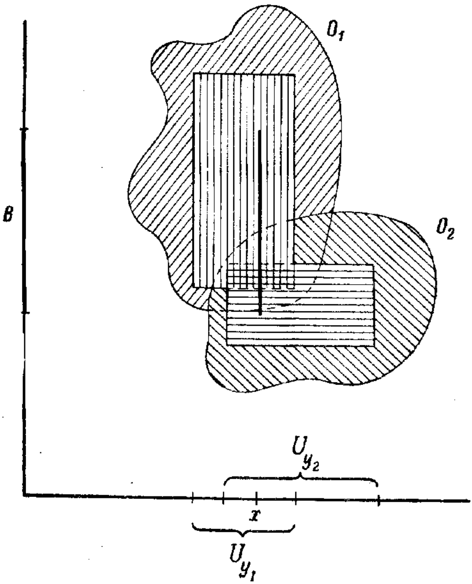

Рис. 1.4.

$U_y \times V_y$. Множества V_y покрывают компактное множество B, так что уже некоторое конечное их число $V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}$ покрывает B. Пусть $U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_k}$. Тогда, если $(x', y') \subset U \times B$, то $y' \in V_{y_i}$ для некоторого i (рис. 1.4) и, разумеется, $x' \in U_{y_i}$. Следовательно, $(x', y') \in U_{y_i} \times V_{y_i}$, а это последнее множество содержится в некотором W из $\mathfrak{S}$. ∎

1.5. Следствие. *Если $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}^m$ компактны, то $A \times B \subset \mathbf{R}^{m+n}$ компактно.*

Доказательство. Если $\mathfrak{S}$ — открытое покрытие множества $A \times B$, то $\mathfrak{S}$ покрывает $\{x\} \times B$ для каждого $x \in A$. Согласно теореме 1.4, существует открытое множество U_x, содержащее x и такое, что $U_x \times B$ покрыто конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$. Поскольку A компактно, среди множеств U_x имеется конечное число множеств $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$, покрывающее A. Так как каждое произведение $U_{x_i} \times B$ покрыто конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$, то конечным числом множеств из $\mathfrak{S}$ покрывается и все произведение $A \times B$. ∎

1.6. Следствие. *Если каждое из множеств A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) компактно, то и произведение $A_1 \times \ldots \times A_k$ компактно. В частности, любой замкнутый параллелепипед в $\mathbf{R}^k$ компактен.*

1.7. Следствие. *Всякое замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$ компактно. Обратное также верно* (задача 1.20).

Доказательство. Если множество $A \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто и ограничено, то оно содержится в некотором замкнутом параллелепипеде B. Если $\mathfrak{S}$ — открытое покрытие для A, то $\mathfrak{S}$ и $\mathbf{R}^n \setminus A$ образуют открытое покрытие для B. Следовательно, конечное число множеств $U_1, \ldots, U_n$ из $\mathfrak{S}$, быть может вместе с $\mathbf{R}^n \setminus A$, покрывает B. Но тогда множества $U_1, \ldots, U_n$ покрывают A. ∎

Задачи

1.14*. Доказать, что объединение любого (даже бесконечного) числа открытых множеств открыто. Доказать, что пересечение двух (а потому и любого конечного числа) открытых множеств открыто. Дать контрпример для бесконечного числа открытых множеств.

1.15. Доказать, что множество $\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x - a| < r\}$ открыто (см. также задачу 1.27).

1.16. Найти внутренность, внешность и границу множеств

$$\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| \leqslant 1\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| = 1\},$$
$$\{x \in \mathbf{R}^n\colon \text{каждое } x^i \text{ рационально}\}.$$

1.17. Построить множество $A \subset [0, 1] \times [0, 1]$, содержащее не более одной точки на каждой горизонтали и каждой вертикали, но имеющее своей границей весь квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. (Указание: достаточно добиться, чтобы A содержало точки каждой четверти квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, каждой его шестнадцатой части и т. д.)

1.18. Пусть $A \subset [0, 1]$ есть объединение таких открытых интервалов (a_i, b_i), что каждая рациональная точка между 0 и 1 содержится в некотором (a_i, b_i). Показать, что границей множества A служит $[0, 1] \setminus A$.

1.19*. Показать, что замкнутое множество A, содержащее всякое рациональное число $r \in [0, 1]$, содержит весь отрезок $[0, 1]$.

1.20. Доказать обращение следствия 1.7: всякое компактное множество в $\mathbf{R}^n$ замкнуто и ограничено (см. также задачу 1.28).

1.21*. а) Доказать, что если A замкнуто и $x \notin A$, то существует такое $d > 0$, что $|y - x| \geqslant d$ для всех $y \in A$.

б) Доказать, что если A замкнуто, B компактно и $A \cap B = \varnothing$, то существует такое $d > 0$, что $|y - x| \geqslant d$ для всех $y \in A$ и $x \in B$. (Указание: для каждого $b \in B$ найти открытое множество U, содержащее b и такое, что требуемое соотношение верно для всех $x \in U \cap B$.)

в) Привести контрпример в $\mathbf{R}^2$, если множества A и B замкнуты, но ни одно из них не компактно.

1.22*. Показать, что если U открыто, а $C \subset U$ компактно, то существует компактное множество $D \subset U$, внутренность которого содержит C.

ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Функция f из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ (называемая иногда векторной функцией n переменных) есть правило, относящее каждой точке x из $\mathbf{R}^n$ некоторую точку из $\mathbf{R}^m$; точка, которую функция f относит x, обозначается $f(x)$. Мы пишем $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (читаем „f отображает $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$“ или „f, отображающая $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$“ в зависимости от контекста) для указания того, что значение $f(x) \in \mathbf{R}^m$ определено для всех $x \in \mathbf{R}^n$. Запись $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ указывает, что $f(x)$ определена только для точек x, пробегающих множество $A \subset \mathbf{R}^n$, которое называется *областью определения* функции f. Под $f(B)$, где $B \subset A$, мы понимаем множество всех значений $f(x)$ для $x \in B$; если $C \subset \mathbf{R}^m$, то по определению полагаем $f^{-1}(C) = \{x \in A\colon f(x) \in C\}$. Запись $f\colon A \to B$ означает, что $f(A) \subset B$.

Для функции $f\colon A \to \mathbf{R}$, где $A \subset \mathbf{R}^2$, можно получить удобное изображение, построив ее график — множество всех точек вида $(x, y, f(x, y))$, образующее некоторую фигуру в 3-мерном пространстве (см., например, рис. 2.1 и 2.2 в гл. 2).

Если f, g: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, то функции $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и f/g определяются точно так же, как и в одномерном случае. Если f: $A \to \mathbf{R}^m$ и g: $B \to \mathbf{R}^p$, где $B \subset \mathbf{R}^m$, то *композиция* $g \circ f$ определяется равенством $(g \circ f)(x) = g(f(x))$; областью определения $g \circ f$ служит $A \cap f^{-1}(B)$. Если f: $A \to \mathbf{R}^m$ взаимно однозначно, т. е. если $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$, то f^{-1}: $f(A) \to \mathbf{R}^n$ определяется требованием, чтобы $f^{-1}(z)$ было тем единственным $x \in A$, для которого $f(x) = z$.

Функция f: $A \to \mathbf{R}^m$ определяет *m координатных функций* $f^1, \ldots, f^m$: $A \to \mathbf{R}$ равенством $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$. Обратно, для любых заданных m функций $g_1, \ldots, g_m$: $A \to \mathbf{R}$ существует такая единственная функция f: $A \to \mathbf{R}^m$, что $f^i = g_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, а именно $f(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$. Эта функция f будет обозначаться $(g_1, \ldots, g_m)$, так что всегда $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Если π: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — тождественное отображение, $\pi(x) = x$, то $\pi^i(x) = x^i$; функция π^i называется *i-й проекцией*.

Запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, как и в одномерном случае, означает, что $f(x)$ можно сделать сколь угодно близким к b, взяв x достаточно близким к a, но не совпадающим с a. На математическом языке это означает, что для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$. Функция f называется *непрерывной в точке a*, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, и функция f: $A \to \mathbf{R}^m$ называется (просто) *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке $a \in A$. Одной из приятных неожиданностей, связанных с этим понятием, является то, что непрерывность можно определить без использования пределов. Из приведенной ниже теоремы 1.8 вытекает, что f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто для всякого открытого множества $U \subset \mathbf{R}^m$; если областью определения f служит не все $\mathbf{R}^n$, то требуется несколько более сложное условие.

1.8. Теорема. *Если* $A \subset \mathbf{R}^n$, *то функция* $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ *непрерывна тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества* $U \subset \mathbf{R}^m$ *существует такое открытое множество* $V \subset \mathbf{R}^n$, *что* $f^{-1}(U) = V \cap A$.

Доказательство. Предположим, что f непрерывна. Если $a \in f^{-1}(U)$, то $f(a) \in U$. Так как U — открытое множество, то существует такой открытый параллелепипед B, что $f(a) \in B \subset U$. Так как f непрерывна в точке a, то выбрав достаточно малый параллелепипед C, содержащий a, можно добиться, чтобы $f(x) \in B$ для всех x, содержащихся в C. Сделаем это для каждого $a \in f^{-1}(U)$, и пусть V — объединение всех таких C. Очевидно, $f^{-1}(U) = V \cap A$. Доказательство обратного предложения аналогично, и мы предоставляем его читателю. ∎

Из теоремы 1.8 вытекает важное следствие.

1.9. Теорема. *Если* $f\colon A \to \mathbf{R}^m$ *непрерывна и* A *компактно, то* $f(A)$ *компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое покрытие множества $f(A)$. Для всякого $U \in \mathcal{O}$ существует такое открытое множество V_U, что $f^{-1}(U) = V_U \cap A$. Семейство всех V_U является открытым покрытием множества A. Так как A компактно, то некоторый конечный набор множеств $V_{U_1}, \ldots, V_{U_n}$ покрывает A. Но тогда множества $U_1, \ldots, U_n$ покрывают $f(A)$. ∎

Если функция $f\colon A \to \mathbf{R}$ ограничена, то степень ее отклонения от непрерывности в точке $a \in A$ можно точно измерить.

Для $\delta > 0$ положим

$$M(a, f, \delta) = \sup \{f(x)\colon\ x \in A \text{ и } |x - a| < \delta\},$$
$$m(a, f, \delta) = \inf \{f(x)\colon\ x \in A \text{ и } |x - a| < \delta\}.$$

Колебание $o(f, a)$ функции f в точке a определяется формулой

$$o(f, a) = \lim_{\delta \to 0} [M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)].$$

Этот предел всегда существует, так как $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)$ убывает при убывании δ.

С $o(f, a)$ связаны два важных факта.

1.10. Теорема. *Ограниченная функция f непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $o(f, a) = 0$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна в a. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ для всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$. Тогда $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) \leqslant 2\varepsilon$. Так как это верно для всякого ε, то $o(f, a) = 0$. Доказательство обратного утверждения аналогично, и мы его предоставляем читателю. ∎

1.11. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутое множество. Тогда для всякой ограниченной функции $f: A \to \mathbf{R}$ и всякого $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in A: o(f, x) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $B = \{x \in A: o(f, x) \geqslant \varepsilon\}$. Покажем, что $\mathbf{R}^n \setminus B$ открыто. Если $x \in \mathbf{R}^n \setminus B$, то либо $x \notin A$, либо $x \in A$ и $o(f, x) < \varepsilon$. В первом случае, поскольку A замкнуто, существует открытый параллелепипед C, содержащий x и такой, что $C \subset \mathbf{R}^n \setminus A \subset \mathbf{R}^n \setminus B$. Во втором случае существует такое $\delta > 0$, что $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta) < \varepsilon$. Пусть C — открытый параллелепипед, содержащий x и такой, что $|x - y| < \delta$ для всех $y \in C$. Тогда, если $y \in C$, то существует такое δ_1, что $|x - z| < \delta$ для всех z, удовлетворяющих условию $|z - y| < \delta_1$. Поэтому $M(y, f, \delta_1) - m(y, f, \delta_1) < \varepsilon$ и, следовательно, $o(y, f) < \varepsilon$, так что $C \subset \mathbf{R}^n \setminus B$. ∎

Задачи

1.23. Пусть $f: A \to \mathbf{R}^m$ и $C \subset \mathbf{R}^m$. В случае когда f взаимно однозначно, $f^{-1}(C)$ было определено двумя способами. Показать, что они эквивалентны.

1.24. Показать, что функция $f: A \to \mathbf{R}^m$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда каждая координатная функция f^i непрерывна.

1.25. Доказать, что линейное преобразование $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ непрерывно. (Указание: использовать задачу 1.10.)

1.26. Пусть $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x > 0 \text{ и } 0 < y < x^2\}$.

а) Показать, что всякая прямая, проходящая через (0, 0), содержит целый интервал с центром (0, 0), принадлежащий $\mathbf{R}^2 \setminus A$.

б) Определим f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, положив $f(x) = 0$, если $x \notin A$, и $f(x) = 1$, если $x \in A$. Для каждой точки $h \in \mathbf{R}^2$ положим $g_h(t) = f(th)$. Показать, что каждая функция g_h непрерывна в 0, но f не непрерывна в (0, 0).

1.27. Доказать открытость множества $\{x \in \mathbf{R}^n: |x - a| < r\}$ путем рассмотрения функции f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $f(x) = |x - a|$.

1.28. Доказать, что для всякого незамкнутого множества $A \subset \mathbf{R}^n$ существует неограниченная непрерывная функция f: $A \to \mathbf{R}$. (Указание: взяв невнутреннюю точку x множества $\mathbf{R}^n \setminus A$, положить $f(y) = 1/|y - x|$.)

1.29. Доказать, что если A компактно, то всякая непрерывная функция f: $A \to \mathbf{R}$ имеет наибольшее и наименьшее значения.

1.30. Пусть f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — возрастающая функция. Показать, что $\sum_{i=1}^{n} o(f, x_i) < f(b) - f(a)$ для любых точек $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$.