

Интегрирование

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение интеграла функции $f: A \rightarrow \mathbf{R}$, где $A \subset \mathbf{R}^n$ — замкнутый параллелепипед в \mathbf{R}^n , столь похоже на определение интеграла функций одной переменной, что мы ограничимся лишь беглыми замечаниями.

Напомним, что разбиением P замкнутого интервала $[a, b]$ называется последовательность t_0, \dots, t_k , где $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$. Разбиение P делит интервал $[a, b]$ на k интервалов $[t_{i-1}, t_i]$. Разбиение параллелепипеда $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ определяется как семейство $P = (P_1, \dots, P_n)$, где каждое P_i есть разбиение интервала $[a_i, b_i]$. Предположим, например, что $P = t_0, \dots, t_k$ — разбиение $[a_1, b_1]$ и $P_2 = s_0, \dots, s_l$ — разбиение $[a_2, b_2]$. Тогда разбиение $P = (P_1, P_2)$ замкнутого прямоугольника $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ делит его на $k \cdot l$ прямоугольников $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$. Вообще, если P_i делит $[a_i, b_i]$ на N_i интервалов, то $P = (P_1, \dots, P_n)$ делит $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ на $N = N_1 \cdot \dots \cdot N_n$ параллелепипедов. Мы будем называть их *параллелепипедами разбиения* P .

Предположим теперь, что A — параллелепипед, P — его разбиение и $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная функция.

Для каждого параллелепипеда S разбиения P положим

$$m_S(f) = \inf \{f(x) : x \in S\},$$

$$M_S(f) = \sup \{f(x) : x \in S\},$$

и пусть $v(S)$ — объем S [за *объем* параллелепипеда $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ равно как и параллелепипеда $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$, по определению принимается

произведение $(b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$. Нижняя и верхняя суммы f для P определяются формулами¹⁾

$$L(f, P) = \sum_S m_S(f) v(S) \text{ и } U(f, P) = \sum_S M_S(f) v(S).$$

Очевидно, что $L(f, P) \leq U(f, P)$; верно даже более сильное утверждение (3.2).

3.1. Лемма. *Предположим, что разбиение P' есть продолжение разбиения P (т. е. каждый параллелепипед разбиения P' содержится в некотором параллелепипеде разбиения P). Тогда*

$$L(f, P) \leq L(f, P') \text{ и } U(f, P') \leq U(f, P).$$

Доказательство. Каждый параллелепипед S разбиения P распадается на несколько параллелепипедов S_1, \dots, S_α разбиения P' , так что $v(S) = v(S_1) + \dots + v(S_\alpha)$. Но $m_S(f) \leq m_{S_i}(f)$, поскольку среди значений $f(x)$ для $x \in S$ содержатся все значения $f(x)$ для $x \in S_i$ (и, возможно, также меньшие значения). Поэтому

$$m_S(f) v(S) = m_S(f) v(S_1) + \dots + m_S(f) v(S_\alpha) \leq m_{S_1}(f) v(S_1) + \dots + m_{S_\alpha}(f) v(S_\alpha).$$

Сумма левых частей по всем S есть $L(f, P)$, тогда как суммой правых частей служит $L(f, P')$. Следовательно, $L(f, P) \leq L(f, P')$. Для верхних сумм доказательство аналогично. ■

3.2. Следствие. $L(f, P') \leq U(f, P)$ для любых разбиений P и P' .

Доказательство. Пусть P'' — разбиение, продолжающее и P и P' (например, $P'' = (P_1'', \dots, P_n'')$, где P_i'' — разбиение $[a_i, b_i]$, продолжающее и P_i и P_i'). Тогда

$$L(f, P') \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P). \quad \blacksquare$$

Из 3.2 следует, что верхняя грань всех нижних сумм для f не превосходит нижней грани всех верхних сумм. Функция $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ называется *интегрируемой* на парал-

¹⁾ L и U — от lower (нижний) и upper (верхний) соответственно. — Прим. перев.

лелепипеде A , если она ограничена и $\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\}$. Это общее значение обозначается $\int_A f$ и называется *интегралом* f по A . Часто используют обозначение $\int_A f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$. Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$,

где $a \leq b$, то $\int_a^b f = \int_{[a, b]} f$.

Следующая теорема доставляет простой, но важный критерий интегрируемости.

3.3. Теорема. *Ограниченная функция $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P параллелепипеда A , что $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.*

Доказательство. Если это условие выполнено, то, очевидно, $\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\}$ и f интегрируема. С другой стороны, если f интегрируема, т. е. $\sup \{L(f, P)\} = \inf \{U(f, P)\}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ имеются такие разбиения P и P' , что $U(f, P) - L(f, P') < \varepsilon$. Если тогда P'' продолжает и P и P' , то, как вытекает из леммы 3.1, $U(f, P'') - L(f, P'') \leq U(f, P) - L(f, P') < \varepsilon$. ■

В следующих параграфах мы охарактеризуем класс интегрируемых функций и найдем метод вычисления интегралов. Здесь же ограничимся рассмотрением двух функций, одна из которых интегрируема, а другая — нет.

1. Пусть $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ постоянна, $f(x) = c$. Тогда для всякого разбиения P и всякого его параллелепипеда S имеем $m_S(f) = M_S(f) = c$, так что $L(f, P) = U(f, P) = \sum_S cv(S) = cv(A)$. Следовательно, $\int_A f = cv(A)$.

2. Пусть $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Каково бы ни было разбиение P , всякий его параллелепипед S будет содержать и точки (x, y) с рациональ-

ным x , и точки (x, y) с иррациональным x . Поэтому $m_S(f) = 0$ и $M_S(f) = 1$, так что

$$L(f, P) = \sum_S 0v(S) = 0,$$

а

$$U(f, P) = \sum_S 1v(S) = v([0, 1] \times [0, 1]) = 1.$$

Следовательно, f неинтегрируема.

Задачи

3.1. Пусть $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Показать, что f интегрируема и $\int_{[0, 1] \times [0, 1]} f = 1/2$.

3.2. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема и $g = f$ всюду, кроме конечного числа точек. Показать, что g интегрируема и $\int_A f = \int_A g$.

3.3. Пусть $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы.

а) Показать, что для всякого разбиения P параллелепипеда A и всякого параллелепипеда S этого разбиения $m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g)$ и $M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g)$, а потому $L(f, P) + L(g, P) \leq L(f+g, P)$ и $U(f+g, P) \leq U(f, P) + U(g, P)$.

б) Показать, что $f+g$ интегрируема и $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$.

в) Показать, что $\int_A cf = c \int_A f$ для всякой постоянной c .

3.4. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ и P — разбиение A . Показать, что f интегрируема тогда и только тогда, когда для всякого параллелепипеда S разбиения P сужение $f|_S$ функции f на S интегрируемо, причем в этом случае $\int_A f = \sum_S \int_S f|_S$.

3.5. Пусть $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы и $f \leq g$. Показать, что $\int_A f \leq \int_A g$.

3.6. Показать, что если $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|.$$

3.7. Пусть $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально, } y \text{ иррационально,} \\ \frac{1}{q}, & \text{если } x \text{ рационально, } y = \frac{p}{q} \text{ — несократимая дробь.} \end{cases}$$

Показать, что f интегрируема и $\int_{[0, 1] \times [0, 1]} f = 0$.

МЕРА 0 И ОБЪЕМ 0

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет (n -мерную) меру 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\{U_1, U_2, U_3, \dots\}$ этого множества замкнутыми параллелепипедами, что

$\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Очевидно (но тем не менее полезно напомнить), что если A имеет меру 0 и $B \subset A$, то B имеет меру 0. Нетрудно проверить, что в определении меры 0 вместо замкнутых параллелепипедов можно брать открытые.

Множество, содержащее лишь конечное число точек, очевидно, имеет меру 0. Множество, состоящее из бесконечного числа точек, которые могут быть занумерованы в последовательность a_1, a_2, a_3, \dots , также имеет меру 0; в самом деле для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого номера l можно выбрать замкнутый параллелепипед U_l , содержащий a_l , так,

чтобы $v(U_l) < \varepsilon/2^l$, а тогда $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$.

Важным и довольно неожиданным примером такого бесконечного множества является множество всех рациональных чисел между 0 и 1. Чтобы убедиться в этом, нужно только перечислять дроби из нижеследующей таблицы в порядке, указанном стрелками (исключая повторе-

ния и числа, большие чем 1)

$$\begin{array}{ccccc}
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 / & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 / & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 / & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 / & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 / & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
 / & 0 & & & & \\
 / & 4 & & & &
 \end{array}$$

Этот пример допускает важное обобщение.

3.4. Теорема. Если $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$ и каждое A_i имеет меру 0, то A имеет меру 0.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Будучи множеством меры нуль, A_i обладает таким покрытием $\{U_{i,1}, U_{i,2}, U_{i,3}, \dots\}$ замкнутыми параллелепипедами, что $\sum_{j=1}^{\infty} v(U_{i,j}) < \varepsilon/2^i$. Тогда семейство всех $U_{i,j}$ образует покрытие всего множества A . Из таблицы

$$\begin{array}{ccccc}
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
 / & U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & \dots \\
 / & U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & \dots \\
 / & U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} & \dots
 \end{array}$$

видно, что это семейство может быть занумеровано в последовательность V_1, V_2, V_3, \dots . Очевидно, $\sum_{i=1}^{\infty} v(V_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon/2^i = \varepsilon$. ■

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет (n -мерный) объем 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$ этого множества замкнутыми параллелепи-

педами, что $\sum_{i=1}^n v(U_i) < \varepsilon$. Очевидно, что множество, имеющее объем 0, имеет также меру 0. В этом определении вместо замкнутых параллелепипедов, как и раньше, можно было бы воспользоваться открытыми.

3.5. Теорема. *Если $a < b$, то интервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$ не может иметь объем 0. А именно, если $\{U_1, \dots, U_n\}$ — его конечное покрытие замкнутыми интервалами, то*

$$\sum_{i=1}^n v(U_i) \geq b - a.$$

Доказательство. Применим индукцию по n . Утверждение очевидно при $n = 1$. Предположим, что теорема справедлива для покрытий n интервалами, и пусть $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$, — покрытие $[a, b]$ $n + 1$ замкнутым интервалом. Можно считать (изменяя, если нужно, нумерацию), что $a \in U_1$. Тогда $U_1 = [\alpha, \beta]$, где $\alpha \leq a \leq \beta$. Если $\beta \geq b$, то $v(U_1) \geq b - a$. Если же $\beta < b$, то $\{U_2, \dots, U_n\}$ — покрытие интервала $[\beta, b]$ n интервалами, следовательно, $\sum_{i=2}^{n+1} v(U_i) \geq b - \beta$ и потому $\sum_{i=1}^{n+1} v(U_i) \geq (\beta - a) + (b - \beta) = b - a$. ■

Если $a < b$, то верно также, что $[a, b]$ не может иметь меру 0. Это вытекает из следующей теоремы.

3.6. Теорема. *Компактное множество A , имеющее меру 0, имеет также объем 0.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как A имеет меру 0, то существует такое его покрытие $\{U_1, U_2, \dots\}$ открытыми параллелепипедами, что $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \varepsilon$. Так как A компактно, то уже некоторое конечное число U_1, \dots, U_n параллелепипедов U_i покрывает A и, разумеется,

$$\sum_{i=1}^n v(U_i) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Заключение теоремы 3.6 неверно, если A некомпактно. Пусть, например, A — множество всех рациональных чисел между 0 и 1; тогда A имеет меру 0. Предположим,

что $\{[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]\}$ — некоторое покрытие A . Тогда A содержится в замкнутом множестве $[a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$, и потому $[0, 1] \subset [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$.

Из теоремы 3.5 следует, что $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \geq 1$ для всякого такого покрытия и, следовательно, A не может иметь объем 0.

Задачи

3.8. Доказать, что $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ не может иметь объем 0, если $a_i < b_i$ для всех i . (Вероятно, вы решите доказывать это в лоб; но см. задачу 3.25.)

3.9. а) Показать, что неограниченное множество не может иметь объем 0.

б) Дать пример замкнутого множества меры 0, не имеющего объема 0.

3.10. а) Показать, что если множество S имеет объем 0, то и его граница имеет объем 0.

б) Дать пример ограниченного множества S меры 0, граница которого не имеет меру 0.

3.11. Пусть A — множество из задачи 1.18. Показать, что если $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < 1$, то его граница не имеет меру 0.

3.12. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Показать, что множество ее точек разрыва имеет меру 0. (Указание: используя задачу 1.30, показать, что множество $\left\{x: o(f, x) > \frac{1}{n}\right\}$ конечно для любого целого положительного n .)

3.13*. а) Показать, что множество всех параллелепипедов $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ с рациональными a_i и b_i может быть расположено в последовательность.

б) Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ произвольное множество и \mathcal{O} — его открытое покрытие. Показать, что существует последовательность U_1, U_2, U_3, \dots элементов из \mathcal{O} , также покрывающая A . (Указание: для каждого $x \in A$ существует такой параллелепипед $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ с рациональными a_i и b_i , что $x \in B \subset U$ для некоторого $U \in \mathcal{O}$.)

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Напомним, что $o(f, x)$ обозначает колебание функции f в точке x .

3.7. Лемма. Пусть A — замкнутый параллелепипед и $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция, у кото-

рой $o(f, x) < \varepsilon$ для всех $x \in A$. Тогда A обладает таким разбиением P , что $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon v(A)$.

Доказательство. Для каждого $x \in A$ существует такой замкнутый параллелепипед U_x , содержащий x внутри себя, что $M_{U_x}(f) - m_{U_x}(f) < \varepsilon$. Так как A компактно, то конечное число U_{x_1}, \dots, U_{x_n} множеств U_x покрывает A . Пусть P — разбиение множества A , каждый параллелепипед которого содержится в некотором U_{x_i} . Тогда $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ для каждого параллелепипеда S разбиения P , так что

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] v(S) < \varepsilon v(A). \blacksquare$$

3.8. Теорема. Пусть A — замкнутый параллелепипед, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция и B — множество ее точек разрыва. Тогда f интегрируема на A в том и только том случае, когда B — множество меры 0.

Доказательство. Предположим сначала, что B имеет меру 0. Пусть $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon = \{x: o(f, x) \geq \varepsilon\}$. Тогда $B_\varepsilon \subset B$, так что B_ε имеет меру 0. Поскольку B_ε компактно (теорема 1.11), B_ε имеет объем 0. Таким образом, существует конечное семейство U_1, \dots, U_n замкнутых параллелепипедов, внутренности которых покрывают B_ε , такое, что $\sum_{i=1}^n v(U_i) < \varepsilon$. Пусть P — разбиение A , каждый параллелепипед S которого принадлежит одной из следующих двух групп (см. рис. 3.1):

\mathcal{P}_1 , состоящей из таких параллелепипедов S , что $S \subset U_i$ для некоторого i .

\mathcal{P}_2 , состоящей из параллелепипедов S , для которых $S \cap B_\varepsilon = \emptyset$.

Пусть $|f(x)| < M$ для всех $x \in A$. Тогда $M_S(f) - m_S(f) \leq 2M$ для каждого S . Поэтому

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot v(S) \leq 2M \sum_{i=1}^n v(U_i) < 2M\varepsilon.$$

Далее, если $S \in \mathcal{S}_2$, то $o(f, x) < \varepsilon$ при $x \in S$. Из леммы 3.7 следует, что существует такое продолжение P' разбиения P , что

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot v(S') < \varepsilon \cdot v(S)$$

для всякого $S \in \mathcal{S}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} U(f, P') - L(f, P') &= \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] v(S') + \\ &+ \sum_{S' \subset S \in \mathcal{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] v(S') < \\ &< 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathcal{S}_2} \varepsilon v(S) \leq 2M\varepsilon + \varepsilon v(A). \end{aligned}$$

Так как M и $v(A)$ фиксированы, то отсюда следует, что, выбирая надлежащим образом разбиение P' , можно сде-

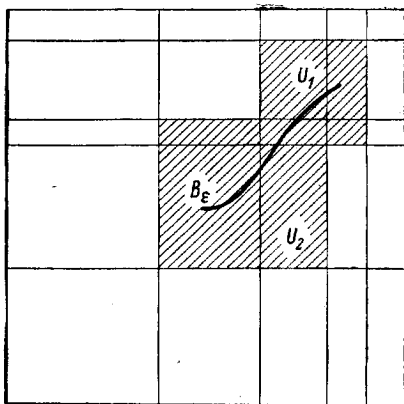


Рис. 3.1. Заштрихованные прямоугольники принадлежат \mathcal{S}_1 .

лать $U(f, P') - L(f, P')$ как угодно малым. Таким образом, f интегрируема.

Обратно, предположим, что f интегрируема. Так как $B = B_{1/2} \cup B_{1/3} \cup \dots$, то достаточно (теорема 3.4) доказать, что каждое $B_{1/n}$ есть множество меры 0.

Мы покажем, что каждое $B_{1/n}$ имеет объем 0 (но так как $B_{1/n}$ компактно, то на самом деле это то же самое).

Пусть $\varepsilon > 0$, P — такое разбиение множества A , что $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/n$, и \mathcal{S} — семейство всех параллелепипедов S разбиения P , пересекающихся с $B_{1/n}$. Тогда \mathcal{S} покрывает $B_{1/n}$. Но если $S \in \mathcal{S}$, то $M_S(f) - m_S(f) \geq 1/n$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) &\leq \sum_{S \in \mathcal{S}} [M_S(f) - m_S(f)] v(S) \leq \\ &\leq \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] v(S) < \frac{\varepsilon}{n} \end{aligned}$$

и, следовательно, $\sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) < \varepsilon$. ■

До сих пор мы имели дело только с интегралами от функций, заданных на параллелепипедах. Интегралы по другим множествам легко сводятся к интегралам этого вида. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$. *Характеристическая функция* χ_C множества C определяется так:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin C, \\ 1 & \text{при } x \in C. \end{cases}$$

Если $C \subset A$ для некоторого замкнутого параллелепипеда A и $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена, то под $\int_C f$ понимается

$\int_A f \chi_C$ в предположении, что функция $f \chi_C$ интегрируема.

Последнее во всяком случае имеет место (задача 3.14), если f и χ_C интегрируемы.

3.9. Теорема. *Функция $\chi_C: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда граница множества C имеет меру 0 (и следовательно, объем 0).*

Доказательство. Если x — внутренняя точка множества C , то существует такой открытый параллелепипед U , что $x \in U \subset C$. Таким образом, $\chi_C = 1$ на U и очевидно, что χ_C непрерывна в x . Аналогично, если точка x — внешняя по отношению к C , то существует такой открытый параллелепипед U , что $x \in U \subset \mathbb{R}^n \setminus C$. Поэтому $\chi_C = 0$ на U и χ_C непрерывна в x . Наконец, если x принадлежит границе множества C , то для всякого открытого паралле-

лепипеда U , содержащего x , существуют точка $y_1 \in U \cap C$ и точка $y_2 \in U \cap (\mathbb{R}^n \setminus C)$. Тогда $\chi_C(y_1) = 1$ и $\chi_C(y_2) = 0$. Следовательно, χ_C разрывна в x . Таким образом, множество точек разрыва функции χ_C совпадает с границей C и требуемый результат следует из теоремы 3.8. ■

Ограниченное множество C , граница которого имеет меру 0, называется *измеримым по Жордану*. Интеграл $\int_C 1$ называется (n -мерным) *объемом* множества C . Разумеется, одномерный объем часто называют *длиной*, а двумерный — *площадью*.

Задача 3.11 показывает, что даже открытое множество C может не быть измеримым по Жордану, так что интеграл $\int_C f$ не обязательно определен, даже если C открыто, а f непрерывна. Это неудобство будет вскоре устранено.

Задачи

3.14. Показать, что если $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы, то интегрируемо и $f \cdot g$.

3.15. Показать, что множество C , имеющее объем 0, содержится в некотором замкнутом параллелепипеде A , измеримо по Жордану и $\int_A \chi_C = 0$.

3.16. Дать пример ограниченного множества C меры 0, для которого $\int_A \chi_C$ не существует.

3.17. Показать, что если C — ограниченное множество меры 0 и интеграл $\int_A \chi_C$ существует, то он равен нулю. (Указание: показать, что $L(f, P) = 0$ для всех разбиений P ; использовать задачу 3.8.)

3.18. Показать, что если $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная функция и $\int_A f = 0$, то $\{x: f(x) \neq 0\}$ имеет меру 0. (Указание: доказать, что $\{x: f(x) > 1/n\}$ имеет объем 0.)

3.19. Пусть A — открытое множество из задачи 1.18. Показать, что если $f = \chi_A$ с точностью до множества меры 0, то f интегрируема на $[0, 1]$.

3.20. Показать, что возрастающая функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на $[a, b]$.

3.21. Показать, что множество $C \subset A$, где A — замкнутый параллелепипед, измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P параллелепипеда A , что $\sum_{S \in \mathcal{S}_1} v(S) - \sum_{S \in \mathcal{S}_2} v(S) < \varepsilon$, где \mathcal{S}_1 состоит из всех параллелепипедов разбиения P , пересекающихся с C , а \mathcal{S}_2 — из всех содержащихся в C .

3.22*. Показать, что если множество A измеримо по Жордану, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое по Жордану компактное множество $C \subset A$, что $\int_A \chi_{A \setminus C} < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Проблема вычисления интегралов в известном смысле решается теоремой 3.10, сводящей вычисление интегралов по замкнутому параллелепипеду из \mathbb{R}^n , $n > 1$, к вычислению интегралов по замкнутым интервалам из \mathbb{R} . Достаточно важная, чтобы заслуживать специального наименования, эта теорема обычно называется теоремой Фубини, хотя она является лишь более или менее частным случаем теоремы, доказанной Фубини к моменту, когда теорема 3.10 уже давно была известна.

Идея, лежащая в основе теоремы, лучше всего иллюстрируется (рис. 3.2) на примере положительной непрерывной функции $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть t_0, \dots, t_n — разбиение интервала $[a, b]$. Разобьем $[a, b] \times [c, d]$ на n полос прямолинейными отрезками $\{t_i\} \times [c, d]$.

Если определить g_x равенством $g_x(y) = f(x, y)$, то площадь области, ограниченной снизу отрезком $\{x\} \times [c, d]$, а сверху проектирующейся на него частью графика f , будет равна

$$\int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Поэтому объем области, ограниченной снизу прямоугольником $[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]$, а сверху — соответствующей частью графика f , будет приближенно равен

$$(t_i - t_{i-1}) \int_0^d f(x, y) dy \quad \text{с произвольным } x \in [t_{i-1}, t_i].$$

Таким образом, интеграл

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f = \sum_{i=1}^n \int_{[t_{i-1}, t_i] \times [c, d]} f$$

приближенно равен

$$\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \int_c^d f(x_i, y) dy \quad \text{с произвольным } x_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

С другой стороны, такого рода суммы входят в определение $\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$. Таким образом, есть основание надеяться, что функция h , определенная равенством

$$h(x) = \int_c^d g_x = \int_c^d f(x, y) dy, \quad \text{интегрируема на } [a, b] \text{ и}$$

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f = \int_a^b h = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Это и в самом деле окажется верным, когда f непрерывна, однако в общем случае возникают трудности. Предположим, например, что множеством точек разрыва f служит $\{x_0\} \times [c, d]$ при некотором $x_0 \in [c, d]$. Тогда f

интегрируема на $[a, b] \times [c, d]$, но $h(x_0) = \int_a^d f(x_0, y) dy$

не имеет даже смысла. В силу этого теорема Фубини формулируется несколько странным образом и сопровождается замечаниями, относящимися к различным специальным случаям, когда возможна более простая формулировка.

Нам потребуются еще два термина. Если $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ — ограниченная функция на замкнутом параллелепипеде, то, интегрируема f или нет, верхняя грань всех нижних сумм и нижняя грань всех верхних сумм всегда существуют.

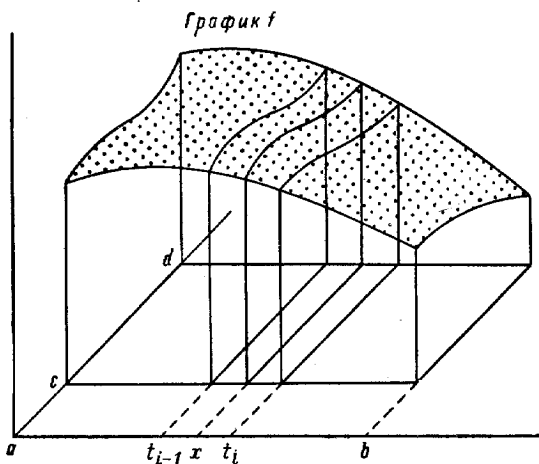


Рис. 3.2.

Они называются соответственно *нижним* и *верхним интегралами* f по A и обозначаются соответственно

$$\mathbf{L} \int_A f \quad \text{и} \quad \mathbf{U} \int_A f.$$

3.10. Теорема Фубини. Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ и $B \subset \mathbf{R}^m$ — замкнутые параллелепипеды и $f: A \times B \rightarrow \mathbf{R}$ — интегрируемая функция. Пусть далее функция $g_x: B \rightarrow \mathbf{R}$ определена для каждого $x \in A$ равенством $g_x(y) = f(x, y)$ и

$$\mathcal{L}(x) = \mathbf{L} \int_B g_x = \mathbf{L} \int_B f(x, y) dy,$$

$$\mathcal{U}(x) = \mathbf{U} \int_B g_x = \mathbf{U} \int_B f(x, y) dy.$$

Тогда \mathcal{L} и \mathcal{U} интегрируемы на A и

$$\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \left(L \int_B f(x, y) dy \right) dx,$$

$$\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{U} = \int_A \left(U \int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

(Интегралы в правой части называются *повторными интегралами* для f .)

Доказательство. Пусть P_A — разбиение для A и P_B — разбиение для B . Вместе они дают разбиение P для $A \times B$; каждый параллелепипед S которого имеет вид $S_A \times S_B$, где S_A — параллелепипед разбиения P_A , а S_B — параллелепипед разбиения P_B . Тогда

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_S m_S(f) v(S) = \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f) v(S_A \times S_B) = \\ &= \sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) v(S_B) \right) v(S_A). \end{aligned}$$

Но если $x \in S_A$, то, очевидно, $m_{S_A \times S_B}(f) \leq m_{S_B}(g_x)$. Следовательно, для всех $x \in S_A$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) v(S_B) &\leq \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x) v(S_B) \leq \\ &\leq L \int_B g_x = \mathcal{L}(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f) v(S_B) \right) v(S_A) \leq L(\mathcal{L}, P_A).$$

Таким образом,

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A) \leq U(\mathcal{L}, P_A) \leq U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P),$$

где последнее неравенство доказывается совершенно так же, как первое. Но так как f интегрируема, то $\sup \{L(f, P)\} =$

$$= \inf \{U(f, P)\} = \int_{A \times B} f. \text{ Поэтому}$$

$$\sup \{L(\mathcal{L}, P_A)\} = \inf \{U(\mathcal{L}, P_A)\} = \int_{A \times B} f.$$

Другими словами, \mathcal{L} интегрируема на A и $\int_{A \times B} f = \int_A \mathcal{L}$.

Утверждение для \mathcal{U} следует из неравенств

$$L(f, P) \leq L(\mathcal{L}, P_A) \leq L(\mathcal{U}, P_A) \leq \\ \leq U(\mathcal{U}, P_A) \leq U(f, P). \blacksquare$$

Замечания. 1. Аналогично доказывается, что

$$\int_{A \times B} f = \int_B \left(L \int_A f(x, y) dx \right) dy = \int_B \left(U \int_A f(x, y) dx \right) dy.$$

Эти интегралы называются *повторными интегралами* для f , взятыми в обратном порядке по сравнению с выбранным в теореме. Как видно из задач, возможность перемены порядка интегрирования в повторном интеграле имеет многочисленные следствия.

2. На практике часто встречается случай, когда g_x интегрируема для всех $x \in A$, так что

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

Это заведомо имеет место, когда f непрерывна.

3. Самое худшее, с чем обычно сталкиваются на практике, это неинтегрируемость g_x для конечного числа точек $x \in A$. В этом случае $\mathcal{L}(x) = \int_B f(x, y) dy$ для всех значений x , кроме этого конечного множества. Так как $\int_A \mathcal{L}$ не изменяется, если \mathcal{L} переопределить в конечном числе точек, то все еще можно писать

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx,$$

считая, что интегралу $\int_B f(x, y) dy$, когда он не существует, придано произвольное значение, скажем 0.

4. Бывают случаи, когда этого нельзя сделать и теоремой 3.10 приходится пользоваться в том виде, как она

сформулирована. Пусть $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ определена условиями

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально и } y \text{ иррационально,} \\ 1 - \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q} \text{ — несократимая дробь и} \\ & \text{ } y \text{ рационально.} \end{cases}$$

Тогда f интегрируема и $\int_{[0, 1] \times [0, 1]} f = 1$. Но $\int_0^1 f(x, y) dy = 1$,

если x иррационально, и не существует, если x рационально. Поэтому если интеграл $h(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$, когда

он не существует, положить равным нулю, то функция h будет неинтегрируемой.

5. Если $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ и $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ — достаточно хорошая функция, то повторное применение теоремы Фубини дает

$$\int_A f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \right) \dots \right) dx^n.$$

6. Теорему Фубини можно использовать и для вычисления $\int_C f$, где $C \subset A$, поскольку этот интеграл по определению равен $\int_A \chi_C f$. Пусть, например,

$$C = [-1, 1] \times [-1, 1] \setminus \{(x, y): |(x, y)| < 1\}.$$

Тогда

$$\int_C f = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \chi_C(x, y) dy \right) dx.$$

Но

$$\chi_C(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y > \sqrt{1-x^2} \text{ или } y < -\sqrt{1-x^2}, \\ 0 & \text{во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x, y) \chi_C(x, y) dy &= \\ &= \int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Вообще основная трудность при получении выражения для $\int_C f$, где $C \subset A \times B$, состоит в определении $C \cap (\{x\} \times B)$

для $x \in A$. Если легче определить $C \cap (A \times \{y\})$ для $y \in B$, то следует воспользоваться повторным интегралом

$$\int_C f = \int_B \left(\int_A f(x, y) \cdot \chi_C(x, y) dx \right) dy.$$

Задачи

3.23. Пусть $C \subset A \times B$ — множество объема 0 и $A' \subset A$ — множество всех $x \in A$, для которых $\{y \in B: (x, y) \in C\}$ не имеет объем 0. Показать, что A' — множество меры 0. (Указание:

χ_C интегрируема и $\int_{A \times B} \chi_C = \int_A \mathcal{U} = \int_A \mathcal{L}$, так что $\int_A (\mathcal{U} - \mathcal{L}) = 0$.)

3.24. Пусть $C \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — объединение всех множеств $\{p/q\} \times [0, 1/q]$, где p/q — несократимые дроби из $[0, 1]$. Показать, что для множества C слово „мера“ в задаче 3.23 нельзя заменить словом „объем“.

3.25. Используя индукцию по n , показать, что $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ не может иметь меру 0 (или объем 0), если $a_i < b_i$ для каждого i .

3.26. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ — интегрируемая неотрицательная функция и $A_f = \{(x, y): a \leq x \leq b \text{ и } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Показать, что множество A_f измеримо по Жордану и имеет площадь $\int_a^b f$.

3.27. Показать, что если $f: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ интегрируема то

$$\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y) dy dx.$$

(Указание: вычислить двумя различными способами $\int_C f$

с подходяще подобранным множеством $C \subset [a, b] \times [a, b]$.)

3.28*. Используя теорему Фубини, дать простое доказательство того, что $D_{1,2}f = D_{2,1}f$, если эти смешанные производные непрерывны. (Указание: если $D_{1,2}f(a) - D_{2,1}f(a) > 0$, то $D_{1,2}f - D_{2,1}f > 0$ на некотором параллелепипеде A , содержащем a .)

3.29. С помощью теоремы Фубини вывести выражение для объема множества в \mathbb{R}^3 , получаемого вращением вокруг оси x множества, лежащего в плоскости yz .

3.30. Пусть C — множество из задачи 1.17. Показать, что

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_C(x, y) dx \right) dy = \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_C(y, x) dy \right) dx = 0,$$

но $\int_{[0,1] \times [0,1]} \chi_C$ не существует.

3.31. Пусть $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ определена равенством

$$F(x) = \int_{[a_1, x^1] \times \dots \times [a_n, x^n]} f.$$

Какова будет тогда $D_i F(x)$ для внутренних точек x параллелепипеда A ?

3.32*. Пусть $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ и $D_2 f$ непрерывна. Положим $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$. Доказать правило Лейбница:

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x, y) dx. \quad \left(\text{Указание: } F(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \right.$$

$\left. = \int_a^b \left(\int_c^y D_2 f(x, y) dy + f(x, c) \right) dx. \right)$ При доказательстве будет видно, что непрерывность $D_2 f$ можно заменить значительно более слабыми предположениями.

3.33. Пусть $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $D_2 f$ непрерывна и

$$F(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt.$$

а) Найти $D_1 F$ и $D_2 F$.

б) Найти $G'(x)$, если $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t, x) dt$.

3.34*. Пусть $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, причем $D_1 g_2 = D_2 g_1$.
Как и в задаче 2.21, положим

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0) dt + \int_0^y g_2(x, t) dt.$$

Показать, что $D_1 f(x, y) = g_1(x, y)$.

3.35*. а) Пусть $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \dots & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(где вторая матрица содержит в точности одну единицу вне диагонали). Показать, что объем образа $g(U)$ любого параллелепипеда U равен $|\det g| v(U)$.

б) Доказать, что $|\det g| v(U)$ есть объем образа $g(U)$ для всякого линейного отображения $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. (Указание: если $\det g \neq 0$, то g есть композиция линейных отображений рассмотренного в а) типа.)

3.36. (Принцип Кавальери.) Пусть A и B — измеримые по Жордану множества из \mathbb{R}^3 , $A_c = \{(x, y): (x, y, c) \in A\}$ и $B_c = \{(x, y): (x, y, c) \in B\}$. Предположим, что A_c и B_c для каждого c измеримы по Жордану и имеют одинаковую площадь. Показать, что A и B имеют одинаковый объем.

РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ

В этом параграфе вводится понятие, имеющее чрезвычайно важное значение в теории интегрирования.

3.11. Теорема. Пусть \mathcal{O} — открытое покрытие множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует такое семейство Φ функций φ класса C^∞ , определенных на некотором открытом множестве, содержащем A , что

1) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ для каждого $x \in A$;

2) для каждого $x \in A$ существует такое открытое множество V , содержащее x , что только конечное число функций из Φ отлично на V от нуля;

3) $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ для каждого $x \in A$ [в силу (2) эта сумма для каждого $x \in A$ конечна на некотором открытом множестве, содержащем x];

4) для всякого $\varphi \in \Phi$ существует такое открытое множество U из \mathcal{C} , что $\varphi = 0$ вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в U .

(Семейство Φ , удовлетворяющее условиям (1) — (3), называется C^∞ -разбиением единицы для A . Если семейство Φ удовлетворяет также условию (4), то говорят, что оно подчинено покрытию \mathcal{C} . В этой главе будет использоваться только непрерывность функций φ .)

Доказательство. *Случай 1. A компактно.*

Тогда некоторое конечное семейство U_1, \dots, U_n открытых множеств из \mathcal{C} покрывает A . Очевидно, достаточно построить разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_1, \dots, U_n\}$. Найдем сначала компактные множества $D_i \subset U_i$, внутренности которых покрывают A . Множества D_i строятся по индукции следующим образом. Предположим, что D_1, \dots, D_k выбраны так, что $\{\text{int } D_1, \dots, \text{int } D_k, U_{k+1}, \dots, U_n\}$ — покрытие A^1). Положим

$$C_{k+1} = A \setminus (\text{int } D_1 \cup \dots \cup \text{int } D_k \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_n).$$

Тогда множество $C_{k+1} \subset U_{k+1}$ компактно. Следовательно (задача 1.22), можно найти такое компактное множество D_{k+1} , что $C_{k+1} \subset \text{int } D_{k+1}$ и $D_{k+1} \subset U_{k+1}$. Построив множества D_1, \dots, D_n , можно для каждого i выбрать неотрицательную функцию ψ_i класса C^∞ , положительную на D_i и равную 0 вне некоторого замкнутого множества, содержащегося в U_i (задача 2.26). Так как $\{D_1, \dots, D_n\}$ покрывает A , то $\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x) > 0$ для всех точек x из некоторого открытого множества U , содержащего A . На U можно положить

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x) + \dots + \psi_n(x)}.$$

Пусть $f: U \rightarrow [0, 1]$ — произвольная функция класса C^∞ ,

¹⁾ Символ $\text{int } D$ означает внутренность (interior) множества D . — *Прим. перев.*

равная 1 на A и 0 вне некоторого замкнутого множества в U . Тогда $\Phi = \{f \cdot \varphi_1, \dots, f \cdot \varphi_n\}$ будет искомым разбиением единицы.

Случай 2. $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots$, где каждое A_i компактно и $A_i \subset \text{int } A_{i+1}$.

Пусть \mathcal{O}_i для каждого i состоит из всех множеств вида $U \cap (\text{int } A_{i+1} \setminus A_{i-2})$, где U пробегает \mathcal{O} . Тогда \mathcal{O}_i будет открытым покрытием компактного множества $B_i = A_i \setminus \text{int } A_{i-1}$. Согласно случаю 1, существует разбиение единицы Φ_i для B_i , подчиненное \mathcal{O}_i . Для всякого $x \in A$ существует такое открытое множество $U \ni x$, что для любых $y \in U$ все члены суммы

$$\sigma(y) = \sum_{\varphi \in \Phi_i, \text{ все } i} \varphi(y),$$

кроме конечного их числа, равны нулю. Это вытекает из того, что если $y \in A_i$, то $\varphi(y) = 0$ для всех

$\varphi \in \Phi_j$ с $j \geq i + 2$. Для каждой функции $\varphi \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ по-

ложим $\varphi'(x) = \varphi(x)/\sigma(x)$. Семейство всех φ' будет искомым разбиением единицы.

Случай 3. A — открытое множество.

Полагая

$$A_i = \left\{ x \in A : |x| \leq i \text{ и расстояние от } x \right.$$

$$\left. \text{до границы } A \geq \frac{1}{i} \right\},$$

приходим к предыдущему случаю.

Случай 4. A — произвольное множество.

Пусть B — объединение всех U из \mathcal{O} . Согласно случаю 3, существует разбиение единицы для B ; оно является также разбиением единицы для A . ■

Следует отметить важное следствие условия (2) теоремы. Пусть множество $C \subset A$ компактно. Для всякого $x \in C$ существует открытое множество V_x , содержащее x и такое, что только конечное число функций $\varphi \in \Phi$ не равно тождественно нулю на V_x . Так как C компактно, то конечное число таких V_x покрывает C . Таким образом, только конечное число функций $\varphi \in \Phi$ не равно тождественно нулю на C .

Приведем важное приложение разбиений единицы, иллюстрирующее их главную роль — склеивать результаты, полученные локально. Мы уже видели, что $\int_A f$ может не

существовать, даже если A — ограниченное открытое множество и множество точек разрыва f имеет меру 0. Но любое открытое множество A во всяком случае обладает таким открытым покрытием \mathcal{O} , что все U из \mathcal{O} содержатся в A и каждое $U \in \mathcal{O}$ измеримо по Жордану (так, например, A есть объединение открытых параллелепипедов). Если \mathcal{O} — такое покрытие и Φ — подчиненное ему разбиение единицы для A , то φf интегрируемо для каждого

$\varphi \in \Phi$. Определяем тогда $\int_A f$ как $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$ в предполо-

жении, что эта сумма сходится (она может сходиться, даже если A и f неограниченны). Эта сумма эквивалентна сумме обычного бесконечного ряда. Мы уже заметили (при рассмотрении случая 3 в доказательстве теоремы 3.11), что открытое множество A есть объединение последовательности компактных множеств. Так как на каждом из этих компактных множеств отлично от тождественного нуля только конечное число функций $\varphi \in \Phi$, то ненулевые

интегралы $\int_A \varphi f$ могут быть занумерованы в последова-

тельность. Поскольку, однако, невозможно отдать предпочтение ни одному из таких способов нумерации, под сходимостью следует понимать сходимость при любом упорядочении, т. е. абсолютную.

3.12. Теорема.

1) Если A — ограниченное множество, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция и множество ее точек разрыва имеет меру 0, то ряд

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f$$

сходится.

2) Если \mathcal{C}' — другое покрытие указанного типа и Ψ — подчиненное ему разбиение единицы, то

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi f.$$

3) Если A измеримо по Жордану и $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, то это определение $\int_A f$ согласуется со старым.

Доказательство. 1) Пусть A содержится в замкнутом параллелепипеде B и $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in A$. Тогда $\int_A |\varphi f| \leq M \int_A \varphi$. Поэтому для всякого конечного семейства $F \subset \Phi$

$$\sum_{\varphi \in F} \left| \int_A \varphi f \right| \leq \sum_{\varphi \in F} M \int_A \varphi = M \int_A \sum_{\varphi \in F} \varphi.$$

Заметим, что правая часть имеет смысл, поскольку F конечно. Но на B мы имеем $\sum_{\varphi \in F} \varphi \leq \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi \leq 1$. Поэтому

$\sum_{\varphi \in F} \left| \int_A \varphi f \right| \leq M \nu(B)$. Таким образом, $\sum_{\varphi \in \Phi} \left| \int_A \varphi f \right|$, а следовательно, и $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f$ сходятся.

2) Если Ψ — еще одно разбиение единицы, то функции $\varphi\psi$ со всевозможными $\varphi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$ образуют разбиение единицы. Но $\varphi \cdot f = 0$ всюду, кроме некоторого компактного множества C , и существует только конечное число функций $\psi \in \Psi$, не равных тождественно нулю на C . Поэтому мы вправе написать, что

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \sum_{\psi \in \Psi} \psi \varphi f = \sum_{\substack{\varphi \in \Phi \\ \psi \in \Psi}} \int_A \psi \varphi f,$$

и на том же основании последнее выражение равно $\sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi f$.

3) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует (задача 3.22) такое компактное измеримое по Жордану множество $C \subset A$, что

$\int_A 1 < \varepsilon$. Существует только конечное число функций $\varphi \in \Phi$, не равных тождественно нулю на C . Для любого включающего их конечного семейства $F \subset \Phi$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_A f - \sum_{\varphi \in F} \int_A \varphi f \right| &\leq \int_A \left| f - \sum_{\varphi \in F} \varphi f \right| \leq M \int_A \left(1 - \sum_{\varphi \in F} \varphi \right) = \\ &= M \int_A \sum_{\varphi \in \Phi \setminus F} \varphi \leq M \int_{A \setminus C} 1 \leq M\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f = \int_A f$. ■

Задачи

3.37. Пусть $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ — неотрицательная непрерывная функция. Показать, что $\int_{(0,1)} f$ существует тогда и только тогда,

когда существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} f$.

3.38. Пусть $A_n = [1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$. Предположим, что $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяет условию $\int_{A_n} f = (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$ ($n = 1,$

2, ...). Показать, что $\int_{(0,1)} f$ не существует, но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\varepsilon, 1-\varepsilon)} f = \ln 2.$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Если $g: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция и $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывна, то, как хорошо известно,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g'.$$

Доказательство весьма несложно: если $F' = f$, то $(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g'$; таким образом, слева стоит $F(g(b)) - F(g(a))$, а справа $F \circ g(b) - F \circ g(a) = F(g(b)) - F(g(a))$.

Предоставляем читателю показать, что если g взаимно однозначно, то рассмотренную формулу можно переписать в виде

$$\int_{g((a, b))} f = \int_{(a, b)} f \circ g \cdot |g'|.$$

(Рассмотреть отдельно случаи, когда g возрастает и когда g убывает.) Обобщение этой формулы на высшие размерности отнюдь не тривиально.

3.13. Теорема. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ — такая взаимно однозначная непрерывно дифференцируемая функция, что $\det g'(x) \neq 0$ для всех $x \in A$. Тогда

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |\det g'|$$

для любой интегрируемой функции $f: g(A) \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство. Начнем с нескольких важных замечаний.

(1) Предположим, что A обладает таким открытым покрытием \mathcal{O} , что

$$\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g) |\det g'|$$

для каждого $U \in \mathcal{O}$ и любой интегрируемой функции f . Тогда теорема верна для всего A . (Так как g автоматически взаимно однозначна на некоторой открытой окрестности каждой точки, то не удивительно, что это единственная часть доказательства, использующая взаимную однозначность g на всем A .)

Доказательство (1). Семейство всех $g(U)$ образует открытое покрытие $g(A)$. Пусть Φ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Если $\varphi = 0$ вне $g(U)$, то, поскольку g взаимно однозначно, $(\varphi f) \circ g = 0$ вне U .

Поэтому равенство

$$\int_{g(U)} \varphi f = \int_U [(\varphi f) \circ g] |\det g'|$$

можно переписать в виде

$$\int_{g(A)} \varphi f = \int_A [(\varphi \cdot f) \circ g] |\det g'|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{g(A)} f &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{g(A)} \varphi f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A [(\varphi f) \circ g] |\det g'| = \\ &= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \circ g)(f \circ g) |\det g'| = \int_A (f \circ g) |\det g'|. \end{aligned}$$

Замечание. Теорема следует также из предположения, что

$$\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|$$

для всех V из некоторого покрытия $g(A)$. Это вытекает из утверждения п. (1), примененного к g^{-1} .

(2) Достаточно доказать теорему для функции $f = 1$.

Доказательство (2). Если теорема верна для $f = 1$, то она верна и для постоянных функций. Пусть V — параллелепипед в $g(A)$ и P — его разбиение. Для каждого параллелепипеда S этого разбиения обозначим через f_S постоянную функцию со значением $m_S(f)$. Тогда

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_S m_S(f) v(S) = \sum_S \int_{\text{Int } S} f_S = \\ &= \sum_S \int_{g^{-1}(\text{Int } S)} (f_S \circ g) |\det g'| \leq \\ &\leq \sum_S \int_{g^{-1}(\text{Int } S)} (f \circ g) |\det g'| = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|. \end{aligned}$$

Так как $\int_V f$ — верхняя грань всех $L(f, P)$, то этим доказано, что $\int_V f \leq \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|$. Аналогичное рассуждение, в котором $f_S = M_S(f)$, показывает, что $\int_V f \geq \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) |\det g'|$. Справедливость утверждения следует теперь из приведенного выше замечания.

(3) Если теорема верна для $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $h: B \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $g(A) \subset B$, то она верна и для $h \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Доказательство (3).

$$\begin{aligned} \int_{h \circ g(A)} f &= \int_{h(g(A))} f = \int_{g(A)} (f \circ h) |\det h'| = \\ &= \int_A [(f \circ h) \circ g] [|\det h'| \circ g] |\det g'| = \\ &= \int_A f \circ (h \circ g) |\det (h \circ g)'|, \end{aligned}$$

(4) Теорема верна для линейного отображения g .

Доказательство (4). В силу (1) и (2) достаточно показать, что

$$\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det g'|$$

для всякого открытого параллелепипеда U . Но это задача 3.35.

Сопоставление п. (3) и (4) показывает, что для любого фиксированного $a \in A$ можно считать $g'(a)$ единичной матрицей. В самом деле, если T — линейное отображение $Dg(a)$, то $(T^{-1} \circ g)'(a) = I$. Так как теорема верна для T , то если она верна для $T^{-1} \circ g$, она будет верна для g .

Теперь уже все подготовлено для доказательства теоремы, которое проводится индукцией по n . Замечания, предшествовавшие формулировке теоремы в соединении с (1) и (2), доказывают справедливость теоремы для случая $n=1$.

Предполагая, что теорема верна для размерности $n - 1$, докажем, что она справедлива и для размерности n . Нам нужно только найти для каждой точки $a \in A$ содержащее ее открытое множество $U \subset A$, для которого теорема верна. При этом можно считать, что $g'(A) = I$.

Определим $h: A \rightarrow \mathbb{R}^n$, положив $h(x) = (g^1(x), \dots, g^{n-1}(x), x^n)$. Тогда $h'(a) = I$. Следовательно, в некотором открытом множестве U' , таком, что $a \in U' \subset A$, функция h взаимно однозначна и $\det h'(x) \neq 0$. Определим теперь $k: h(U') \rightarrow \mathbb{R}^n$, положив $k(x) = (x^1, \dots, x^{n-1}, g^n(h^{-1}(x)))$. Тогда $g = k \circ h$ и g представлено в виде композиции двух отображений, каждое из которых изменяет меньше чем n координат (рис. 3.3).

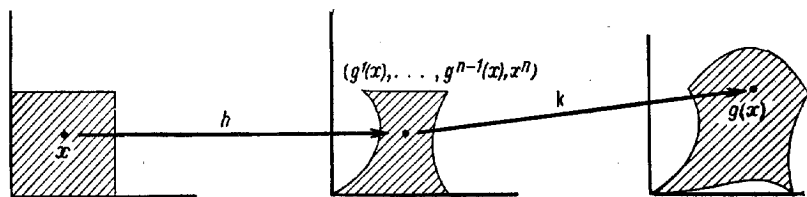


Рис. 3.3.

Остается позаботиться о некоторых деталях, которые обеспечат, чтобы k была функцией нужного вида. Так как $(g^n \circ h^{-1})'(h(a)) = (g^n)'(a) \cdot [h'(a)]^{-1} = (g^n)'(a)$, то $D_n(g^n \circ h^{-1})(h(a)) = D_n g^n(a) = 1$, так что $k'(h(a)) = I$. Поэтому в некотором открытом множестве V , таком, что $h(a) \in V \subset h(U')$, функция k взаимно однозначна и $\det k'(x) \neq 0$. Полагая $U = h^{-1}(V)$, имеем теперь $g = k \circ h$, где $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $h(U) \subset V$. Согласно (3), достаточно доказать теорему для h и k . Мы дадим доказательство для h ; доказательство для k аналогично, но легче.

Пусть $W \subset U$ — параллелепипед вида $D \times [a_n, b_n]$, где D — параллелепипед в \mathbb{R}^{n-1} . По теореме Фубини

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n, b_n]} \left(\int_{x^n(D)} 1 dx^1 \dots dx^{n-1} \right) dx^n,$$

где $h_{x^n}: D \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ — функция, определенная равенством $h_{x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}) = (g^1(x^1, \dots, x^n), \dots, g^{n-1}(x^1, \dots, x^n))$.

Очевидно, h_{x^n} для каждого x^n взаимно однозначна и

$$\det(h_{x^n})'(x^1, \dots, x^{n-1}) = \det h'(x^1, \dots, x^n) \neq 0.$$

Поэтому применение теоремы для случая $n - 1$ дает

$$\begin{aligned} \int_{h(W)} 1 &= \int_{[a_n, b_n]} \left(\int_{h_{x^n}(D)} 1 dx^1 \dots dx^{n-1} \right) dx^n = \\ &= \int_{[a_n, b_n]} \left(\int_D |\det(h_{x^n})'(x^1, \dots, x^{n-1})| dx^1 \dots dx^{n-1} \right) dx^n = \\ &= \int_{[a_n, b_n]} \left(\int_D |\det h'(x^1, \dots, x^n)| dx^1 \dots dx^{n-1} \right) dx^n = \\ &= \int_W |\det h'|. \blacksquare \end{aligned}$$

Условие $\det g'(x) \neq 0$ можно исключить из предположений теоремы 3.13, если воспользоваться следующей теоремой, часто играющей непредвиденную роль.

3.14. Теорема Сарда. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $g: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемая функция и $B = \{x \in A: \det g'(x) = 0\}$. Тогда $g(B)$ имеет меру 0.

Доказательство. Пусть $U \subset A$ — замкнутый параллелепипед, все ребра которого имеют одинаковую длину, скажем l , и $\varepsilon > 0$. Если N достаточно велико и U разбит на N^n параллелепипедов с ребрами длины l/N , то для каждого из этих параллелепипедов S и каждого $x \in S$ имеем

$$|Dg(x)(y - x) - g(y) - g(x)| < \varepsilon |x - y| \leq \varepsilon \sqrt{n} \frac{l}{N}$$

для всех $y \in S$. Если S пересекается с B , то можно выбрать $x \in S \cap B$; поскольку $\det g'(x) = 0$, множество $\{Dg(x)(y - x): y \in S\}$ лежит в некотором $(n - 1)$ -мерном подпространстве V пространства \mathbb{R}^n . Поэтому множество

$\{g(y) - g(x): y \in S\}$ содержится в $\varepsilon \sqrt{n} l/N$ -окрестности этого подпространства¹⁾ V и, значит, $\{g(y): y \in S\}$ содержится в $\varepsilon \sqrt{n} (l/N)$ -окрестности $(n-1)$ -мерной плоскости $V + g(x)$. С другой стороны, в силу леммы 2.10 существует такое число M , что

$$|g(x) - g(y)| < M|x - y| \leq M \sqrt{n} \frac{l}{N}.$$

Таким образом, если S пересекается с B , то множество $\{g(y): y \in S\}$ содержится в цилиндре, высота которого меньше, чем $2\varepsilon \sqrt{n} (l/N)$, а основанием служит $(n-1)$ -мерная сфера радиуса меньше $M \sqrt{n} l/N$. Объем этого цилиндра меньше $C(l/N)^n \varepsilon$, где C — некоторая константа. Но существует не более N^n таких параллелепипедов S . Поэтому $g(U \cap B)$ содержится в множестве объема, меньшего, чем $C(l/N)^n \varepsilon N^n = Cl^n \varepsilon$. Поскольку это верно для всех $\varepsilon > 0$, множество $g(U \cap B)$ имеет меру 0. Так как (задача 3.13) A можно покрыть последовательностью таких параллелепипедов U , то требуемый результат следует из теоремы 3.4. ■

Теорема 3.13 является в действительности лишь самой простой частью теоремы Сарда. Формулировку и доказательство полного более глубокого результата можно найти в [12, стр. 47].

Задачи

3.39. Используя теорему 3.14, доказать теорему 3.13 без предположения, что $\det g'(x) \neq 0$.

3.40. Пусть $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $g'(x) \neq 0$. Доказать, что в некотором открытом множестве, содержащем x , имеет место равенство $g = T \circ g_n \circ \dots \circ g_1$, где g_i имеют вид $g_i(x) = (x^1, \dots, f_i(x), \dots, x^n)$, а T — линейное отображение. Показать, что $g = g_n \circ \dots \circ g_1$ тогда и только тогда, когда $g'(x)$ — диагональная матрица.

3.41. Определим $f: \{r: r > 0\} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ равенством $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

а) Показать, что f взаимно однозначно, вычислить $f'(r, \theta)$ и показать, что $\det f'(r, \theta) \neq 0$ для всех (r, θ) . Показать, что $f(\{r: r > 0\} \times (0, 2\pi))$ есть множество A из задачи 2.23.

¹⁾ Под ρ -окрестностью множества $G \subset \mathbb{R}^n$ понимается множество $\{y \in \mathbb{R}^n: |y - x| < \rho \text{ для некоторого } x \in G\}$. — Прим. перев.

б) Пусть $P = f^{-1}$. Показать, что $P(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$, где

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0, \\ \frac{3}{2} \pi, & \text{если } x = 0, y > 0. \end{cases}$$

Найти $P'(x, y)$. Функция P называется *системой полярных координат* на A .

в) Пусть $C \subset A$ — область, заключенная между окружностями радиусов r_1 и r_2 и лучами, исходящими из нуля и образующими с осью x углы θ_1 и θ_2 . Показать, что если $h: A \rightarrow \mathbb{R}$, где $h(x, y) = g(r(x, y), \theta(x, y))$, то

$$\int_C h = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r g(r, \theta) d\theta dr.$$

Показать, что если $B_r = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq r^2\}$, то

$$\int_{B_r} h = \int_0^r \int_0^{2\pi} r g(r, \theta) d\theta dr.$$

г) Пусть $C_r = [-r, r] \times [-r, r]$. Показать, что

$$\int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi (1 - e^{-r^2})$$

и

$$\int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-r}^r e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Доказать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

и вывести отсюда, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(„Математик — это тот, для кого справедливость этого равенства так же очевидна, как дважды два — четыре“. — Кельвин.)