4

Интегрирование по цепям

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ

Пусть V — векторное пространство (над $\mathbf{R}$). Через V^k будет обозначаться k-кратное произведение $V \times \ldots \times V$. Функция $T\colon V^k \to \mathbf{R}$ называется *полилинейной*, если для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, имеем

$$T(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_k) = \\ = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k),$$
$$T(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) = aT(v_1, \ldots vi, \ldots, v_k).$$

Полилинейная функция $T\colon V^k \to \mathbf{R}$ называется *k-тензором* на V, а множество всех k-тензоров, обозначаемое $\mathcal{J}^k(V)$, становится векторным пространством (над $\mathbf{R}$), если для каждой пары S, $T \in \mathcal{J}^k(V)$ и каждого $a \in \mathbf{R}$ положить

$$(S+T)(v_1, \ldots, v_k) = S(v_1, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_k),$$
$$(aS)(v_1, \ldots, v_k) = aS(v_1, \ldots, v_k).$$

Существует также операция, связывающая различные пространства $\mathcal{J}^k(V)$. А именно, пусть $S \in \mathcal{J}^k(V)$ и $T \in \mathcal{J}^l(V)$; *тензорное произведение* $S \otimes T \in \mathcal{J}^{k+l}(V)$ определяется формулой

$$S \otimes T(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \\ = S(v_1, \ldots, v_k)\, T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Заметим, что порядок сомножителей S и T здесь существен, поскольку $S \otimes T$ и $T \otimes S$ отнюдь не равны. Доказательства следующих свойств операции $\otimes$ предоставляем читателю в качестве легких упражнений:

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T,$$
$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2,$$
$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T),$$
$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

$(S \otimes T) \otimes U$ и $S \otimes (T \otimes U)$ обозначают обычно просто $S \otimes T \otimes U$; аналогично определяются произведения высших порядков $T_1 \otimes \ldots \otimes T_k$.

Читатель, вероятно, уже заметил, что $\mathcal{J}^1(V)$ есть просто сопряженное пространство V^*. Операция $\otimes$ позволяет представить остальные векторные пространства $\mathcal{J}^k(V)$ через $\mathcal{J}^1(V)$.

4.1. Теорема. *Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис пространства V и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — дуальный базис сопряженного пространства, $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Тогда множество всех тензорных произведений k-го порядка*

$$\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k} \quad (1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n)$$

является базисом пространства $\mathcal{J}^k(V)$, которое в силу этого имеет размерность n^k.

Доказательство. Заметим, что

$$\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = \delta_{i_1, j_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_k, j_k} = \begin{cases} 1, \text{ если } j_1 = i_1, \ldots, j_k = i_k, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Если дано k векторов $w_1, \ldots, w_k$, где $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, то для любого $T \in \mathcal{J}^k(V)$ имеем

$$T(w_1, \ldots, w_k) = \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a_{1j_1} \ldots a_{kj_k} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots i_k = 1}^{n} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}(w_1, \ldots, w_k).$$

Следовательно,

$$T = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} T(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k},$$

так что $\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}$ порождают $\mathcal{J}^k(V)$.

Предположим теперь, что $a_{i_1, \ldots, i_k}$ — числа, для которых

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} a_{i_1, \ldots, i_k} \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k} = 0.$$

Применение обеих частей этого равенства к $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$ дает $a_{j_1, \ldots, j_k} = 0$. Таким образом, произведения $\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}$ линейно независимы. ∎

На тензоры можно распространить также важную конструкцию, хорошо известную в случае сопряженных пространств. Именно, всяким линейным отображением $f\colon V \to W$ определяется линейное отображение $f^*\colon \mathcal{J}^k(W) \to \mathcal{J}^k(V)$, действующее по формуле

$$f^*T(v_1, \ldots, v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

для любых $T \in \mathcal{J}^k(W)$ и $v_1, \ldots, v_k \in V$. Легко проверить, что $f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T$.

Читатель уже знаком с некоторыми тензорами, помимо элементов из V^*. Первый пример — внутреннее произведение $\langle\, , \rangle \in \mathcal{J}^2(\mathbf{R}^n)$. Основываясь на том, что всякий хороший предмет математического обихода заслуживает обобщения, мы определяем *внутреннее произведение* на V как 2-тензор T, который *симметричен*, т. е. $T(v, w) = T(w, v)$ для всех $v, w \in V$, и *положительно определен*, т. е. $T(v, v) > 0$ для всех $v \neq 0$. Чтобы выделить $\langle\, , \rangle$ мы называем его *стандартным внутренним произведением на* $\mathbf{R}^n$. Следующая теорема показывает, что это — не слишком далеко идущее обобщение.

4.2. Теорема. *Если T — внутреннее произведение на V, то V обладает базисом $v_1, \ldots, v_n$, для которого $T(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. (Такой базис называется ортонормальным относительно T.) Следовательно, существует такой изоморфизм $f\colon \mathbf{R}^n \to V$, что $T(f(x), f(y)) = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in \mathbf{R}^n$. Другими словами, $f^*T = \langle\, , \rangle$.*

Доказательство. Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — произвольный базис пространства V. Положим

$$w_1' = w_1,$$

$$w_2' = w_2 - \frac{T(w_1', w_2)}{T(w_1', w_1')} w_1',$$

$$w_3' = w_3 - \frac{T(w_1', w_3)}{T(w_1', w_1')} w_1' - \frac{T(w_2', w_3)}{T(w_2', w_2')} w_2'$$

и т. д. Легко проверить, что $T(w'_i, w'_j) = 0$, если $j \neq i$ и $w'_i \neq 0$, так что $T(w'_i, w'_i) > 0$. Полагаем теперь $v_i = w'_i / \sqrt{T(w'_i, w'_i)}$. Изоморфизм f может быть определен равенствами $f(e_i) = v_i$. ∎

Несмотря на свою важность, внутреннее произведение играет значительно меньшую роль, чем другая хорошо известная чуть ли не вездесущая функция, тензор $\det \in \mathcal{J}^n(\mathbf{R}^n)$. Имея в виду обобщение этой функции, вспомним, что перестановка двух строк матрицы меняет знак ее определителя. Этим подсказывается следующее определение: k-тензор $\omega \in \mathcal{J}^k(V)$ называется *антисимметрическим*, если

$$\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \\ = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

для всех $v_1, \ldots, v_k \in V$. (В этом равенстве v_i и v_j меняются местами, все же остальные v остаются на своем месте.) Множество $\Lambda^k(V)$ всех антисимметрических k-тензоров является, очевидно, подпространством в $\mathcal{J}^k(V)$. Поскольку составление определителя требует значительной работы, нет ничего удивительного в том, что антисимметрические тензоры трудно выписывать. Существует, однако, единообразный способ записи каждого из них. Напомним, что подстановке σ приписывается знак $+1$, если она четная, и -1, если она нечетная; знак этот обозначается символом $\operatorname{sgn}\sigma$. Пусть $T \in \mathcal{J}^k(V)$. Определим $\operatorname{Alt}(T)$ равенством[1])

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma\, T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}),$$

где S_k — множество всевозможных подстановок чисел $1, 2, \ldots, k$.

4.3. Теорема.

1) *Если* $T \in \mathcal{J}^k(V)$, *то* $\operatorname{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$.

2) *Если* $\omega \in \Lambda^k(V)$, *то* $\operatorname{Alt}(\omega) = \omega$.

3) $\operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(T)) = \operatorname{Alt}(T)$.

---

[1]) Alt — сокращение от alternation (чередование). — *Прим. перев.*

Доказательство. (1) Пусть (i, j) — подстановка, меняющая местами числа i и j и оставляющая все остальные на месте. Пусть $\sigma \in S_k$. Положим $\sigma' = \sigma \cdot (i, j)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j)}, \ldots, v_{\sigma(i)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(i)}, \ldots, v_{\sigma'(j)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} - \operatorname{sgn} \sigma' T(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)}) = \\
&= -\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

(2) Если $\omega \in \Lambda^k(V)$ и $\sigma = (i, j)$, то $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k)$. Так как всякая подстановка есть произведение подстановок вида (i, j), то это равенство верно для всех σ. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega(v_1, \ldots, v_k) = \omega(v_1, \ldots, v_k).
\end{aligned}$$

(3) Непосредственно следует из (1) и (2). ∎

Для нахождения размерности $\Lambda^k(V)$ была бы желательна теорема, аналогичная теореме 4.1. Конечно, если $\omega \in \Lambda^k(V)$ и $\eta \in \Lambda^l(V)$, то $\omega \otimes \eta$ обычно не принадлежит $\Lambda^{k+l}(V)$. Мы определим поэтому новую операцию, *внешнее произведение* $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$, полагая

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

(Причина введения такого странного коэффициента выяснится позже.) Оставим в качестве упражнения читателю проверку следующих свойств внешнего произведения:

$$\begin{gathered}
(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \\
\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2, \\
(a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta) = a(\omega \wedge \eta), \\
\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega, \quad f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta).
\end{gathered}$$

Справедливо также равенство $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$, но доказательство его требует бо́льших усилий.

4.4. Теорема.

1) *Если* $S \in \mathcal{J}^k(V)$, $T \in \mathcal{J}^l(V)$ *и* $\mathrm{Alt}(S) = 0$, *то* $\mathrm{Alt}(S \otimes T) = \mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0$.

2)
$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)).$$

3) *Если* $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ *и* $\theta \in \Lambda^m(V)$, *то*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\, l!\, m!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Доказательство.

(1)
$$\mathrm{Alt}(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}).$$

Пусть $G \subset S_{k+l}$ состоит из всех подстановок σ, оставляющих на месте числа $k+1, \ldots, k+l$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in G} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \cdot T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = \left[\sum_{\sigma' \in S_k} \mathrm{sgn}\,\sigma' \cdot S(v_{\sigma'(1)}, \ldots, v_{\sigma'(k)})\right] \cdot T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = 0.$$

Пусть теперь $\sigma_0 \notin G$. Положим $G\sigma_0 = \{\sigma\sigma_0\colon \sigma \in G\}$ и $v_{\sigma_0(1)}, \ldots, v_{\sigma_0(k+l)} = w_1, \ldots, w_{k+l}$. Тогда

$$\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot S(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\, T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}) = \left[\mathrm{sgn}\,\sigma_0 \cdot \sum_{\sigma' \in G} \mathrm{sgn}\,\sigma' \cdot S(w_{\sigma'(1)}, \ldots, w_{\sigma'(k)})\right] \cdot T(w_{k+1}, \ldots, w_{k+l}) = 0.$$

Заметим теперь, что $G \cap G\sigma_0 = \varnothing$. В самом деле, если $\sigma \in G \cap G\sigma_0$, то $\sigma = \sigma' \cdot \sigma_0$ для некоторого $\sigma' \in G$ и потому $\sigma_0 = \sigma(\sigma')^{-1} \in G$ вопреки предположению. Продолжая так дальше, мы разобьем S_{k+l} на попарно непересекающиеся подмножества, сумма по каждому из которых равна нулю, так что и суммой по всему S_{k+l} будет 0. Равенство $\mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0$ доказывается аналогично.

(2) Имеем

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)=0.$$

Следовательно, в силу (1)

$$0=\mathrm{Alt}(\omega\otimes[\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta])=$$
$$=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))-\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta).$$

Второе равенство доказывается аналогично.

(3) $$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\mathrm{Alt}((\omega\wedge\eta)\otimes\theta)=$$
$$=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\,\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta).$$

Второе равенство доказывается аналогично. ∎

Естественно обозначить оба произведения $\omega\wedge(\eta\wedge\theta)$ и $(\omega\wedge\eta)\wedge\theta$ просто $\omega\wedge\eta\wedge\theta$ и определить произведения высших порядков $\omega_1\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_r$ аналогичным образом. Взяв теперь какой-либо базис $v_1, \ldots, v_n$ пространства V, можно весьма просто построить по дуальному базису $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ базис для $\Lambda^k(V)$.

4.5. Теорема. *Множество всех*

$$\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}\quad(1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n)$$

является базисом пространства $\Lambda^k(V)$, которое в силу этого имеет размерность

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Доказательство. Если $\omega\in\Lambda^k(V)\subset\mathcal{J}^k(V)$, то можно написать

$$\omega=\sum_{i_1,\ldots,i_k}a_{i_1,\ldots,i_k}\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}.$$

Поэтому

$$\omega=\mathrm{Alt}(\omega)=\sum_{i_1,\ldots,i_k}a_{i_1,\ldots,i_k}\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k}).$$

Так как каждое $\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{i_k})$ отличается от соответствующего внешнего произведения $\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k}$ лишь постоянным множителем, то эти произведения порождают $\Lambda^k(V)$. Их линейная независимость доказывается как в теореме 4.1 (см. задачу 4.1)[1]. ∎

Из теоремы 4.5 следует, что если V имеет размерность n, то $\Lambda^n(V)$ имеет размерность 1. Таким образом, все антисимметрические n-тензоры на V являются кратными любого ненулевого из них. Так как примером такого тензора служит определитель, то неудивительно появление его в следующей теореме.

4.6. Теорема. *Пусть* $v_1, \ldots, v_n$ — *базис пространства* V *и* $\omega \in \Lambda^n(V)$. *Для любых* n *векторов* $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ *из* V *имеем*

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij}) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n).$$

Доказательство. Пусть $\eta \in \mathcal{J}^n(\mathbf{R}^n)$ определено равенством

$$\eta((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = \\ = \omega\left(\sum a_{1j} v_j, \ldots, \sum a_{nj} v_j\right)$$

Очевидно, $\eta \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$, так что $\eta = \lambda \cdot \det$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\lambda = \eta(e_1, \ldots, e_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n)$. ∎

Теорема 4.6 показывает, что ненулевой тензор $\omega \in \Lambda^n(V)$ разбивает базисы пространства V на две группы: тех базисов $v_1, \ldots, v_n$, для которых $\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0$, и тех, для которых $\omega(v_1, \ldots, v_n) < 0$. Если $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ — два базиса и $A = (a_{ij})$ — матрица перехода $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$,

---

[1]) Как показывает условие $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, в теореме 4.5 предполагается, что $k \leqslant n$. Однако из доказательства теоремы видно также, что если $k > n$, то $\Lambda^k(V) = \{0\}$. В самом деле, при перестановке множителей φ_{i_p} и φ_{i_q} произведение $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ умножается на -1. Но если $k > n$, то, поскольку $i_1, \ldots, i_k$ — натуральные числа, не превосходящие n, найдутся неравные индексы p и q, для которых $i_p = i_q$. Поэтому $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ всегда равно 0. — *Прим. ред.*

то $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ принадлежат одной и той же группе тогда и только тогда, когда $\det A > 0$. Этот критерий, не зависящий от ω, всегда можно использовать для разбиения базисов пространства V на две группы. Каждая из этих двух групп называется *ориентацией* пространства V. Ориентация, содержащая базис $v_1, \ldots, v_n$, будет обозначаться символом $[v_1, \ldots, v_n]$, а вторая ориентация — символом $-[v_1, \ldots, v_n]$. *Стандартной ориентацией* пространства $\mathbf{R}^n$ будет называться $[e_1, \ldots, e_n]$.

Тот факт, что $\dim \Lambda^n(\mathbf{R}^n) = 1$, вероятно, не покажется новым, поскольку $\det$ часто определяется как единственный элемент $\omega \in \Lambda^n(\mathbf{R}^n)$, для которого $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$. В случае общего векторного пространства V нет никакого критерия подобного рода для выделения особого $\omega \in \Lambda^n(V)$. Предположим, однако, что на V задано внутреннее произведение T. Если $v_1, \ldots, v_n$ и $w_1, \ldots, w_n$ — два базиса, ортонормальные относительно T, и $A = (a_{ij})$ — матрица перехода $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, то

$$\delta_{ij} = T(w_i, w_j) = \sum_{k, l=1}^{n} a_{ik} a_{jl} T(v_k, v_l) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Другими словами, обозначая через A^T матрицу, транспонированную к A, имеем $A \cdot A^T = I$, так что $\det A = \pm 1$. Из теоремы 4.6 следует, что если $\omega \in \Lambda^n(V)$ таково, что $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \pm 1$, то и $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \pm 1$. Если на V задана еще ориентация μ, то отсюда следует, что существует единственное $\omega \in \Lambda^n(V)$ такое, что $w(v_1, \ldots, v_n) = 1$ для всякого ортонормального базиса $v_1, \ldots, v_n$, у которого $[v_1, \ldots, v_n] = \mu$. Это единственное ω называется *элементом объема* пространства V, определяемым внутренним произведением T и ориентацией μ. Заметим, что $\det$ есть элемент объема пространства $\mathbf{R}^n$, определяемый стандартным внутренним произведением T и стандартной ориентацией μ, и что $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$ есть объем параллелепипеда, натянутого на прямолинейные отрезки, соединяющие 0 с каждой из точек $v_1, \ldots, v_n$.

Мы заключим этот параграф рассмотрением одной конструкции, которое мы проведем лишь для $V = \mathbf{R}^n$.

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ и φ определено равенством

$$\varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}.$$

Так как $\varphi \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$, то существует единственное $z \in \mathbf{R}^n$, такое, что

$$\langle w, z \rangle = \varphi(w) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \\ w \end{pmatrix}.$$

Это z обозначается символом $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ и называется *векторным произведением* векторов $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Из этого определения непосредственно вытекают следующие свойства векторного произведения:

$$v_{\sigma(1)} \times \ldots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot v_{\sigma(1)} \times \ldots \times v_{\sigma(n-1)},$$
$$v_1 \times \ldots \times a v_i \times \ldots \times v_{n-1} = a(v_1 \times \ldots \times v_{n-1}),$$
$$v_1 \times \ldots \times (v_i + v_i') \times \ldots \times v_{n-1} = v_1 \times \ldots \times v_i \times \ldots$$
$$\ldots \times v_{n-1} + v_1 \times \ldots \times v_i' \times \ldots \times v_{n-1}.$$

В математике редко имеют дело с „произведениями", зависящими более чем от двух „сомножителей". В случае двух векторов $v, w \in \mathbf{R}^3$ получаем более привычно выглядящее обычное произведение $v \times w \in \mathbf{R}^3$. По этой причине часто утверждают, что векторное произведение может быть определено только в $\mathbf{R}^3$.

Задачи

4.1*. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbf{R}^n$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — дуальный базис.

а) Показать, что $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$. Какой была бы правая часть, если бы в определение $\wedge$ не входил множитель $\dfrac{(k+l)!}{k!\,l!}$?

б) Показать, что $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} (v_1, \ldots, v_k)$ есть минор матрицы $\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_k \end{pmatrix}$, получающийся при оставлении столбцов с индексами $i_1, \ldots, i_k$.

4.2. Пусть $f\colon V \to V$ — линейное отображение и $\dim V = n$. Тогда $f^*\colon \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ должно быть умножением на некоторую константу c. Показать, что $c = \det f$.

4.3. Показать, что если $\omega \in \Lambda^n(V)$ — элемент объема, определяемый T и μ, и $w_1, \ldots, w_n \in V$, то

$$|\omega(w_1, \ldots, w_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = T(w_i, w_j)$. (Указание: показать, что если $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормальный базис и $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, то $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$.)

4.4. Пусть ω — элемент объема в V, определяемый T и μ, и $f\colon \mathbf{R}^n \to V$ — изоморфизм, для которого $f^*T = \langle\ ,\ \rangle$ и $[f(e_1), \ldots, f(e_n)] = \mu$. Показать, что $f^*\omega = \det$.

4.5. Показать, что если $c\colon [0, 1] \to (\mathbf{R}^n)^n$ непрерывно и каждое $(c^1(t), \ldots, c^n(t))$ есть базис в $\mathbf{R}^n$, то $[c^1(0), \ldots, c^n(0)] = [c^1(1), \ldots, c^n(1)]$. (Указание: рассмотреть $\det \circ c$.)

4.6. а) Что означает $v \times$, если $v \in \mathbf{R}^2$?

б) Показать, что если $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ линейно независимы, то $[v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \ldots \times v_{n-1}]$ есть стандартная ориентация в $\mathbf{R}^n$.

4.7. Показать, что всякое ненулевое $\omega \in \Lambda^n(V)$ является элементом объема, определяемым некоторым внутренним произведением T и ориентацией μ.

4.8. Пусть $\omega \in \Lambda^n(V)$ — элемент объема. Выразить векторное произведение $v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$ через ω.

4.9*. Вывести следующие свойства векторного произведения в $\mathbf{R}^3$:

а) $e_1 \times e_1 = 0, \quad e_2 \times e_1 = -e_3, \quad e_3 \times e_1 = e_2,$
$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_2 = 0, \quad e_3 \times e_2 = -e_1,$
$e_1 \times e_3 = -e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_3 = 0.$

б) $v \times w = (v^2 w^3 - v^3 w^2) e_1 + (v^3 w^1 - v^1 w^3) e_2 + (v^1 w^2 - v^2 w^1) e_3.$

в) $|v \times w| = |v|\,|w| \sin\theta$, где $\theta = \angle(v, w)$,
$\langle v \times w, v\rangle = \langle v \times w, w\rangle = 0.$

г) $\langle v, w \times z\rangle = \langle w, z \times v\rangle = \langle z, v \times w\rangle$,
$v \times (w \times z) = \langle v, z\rangle w - \langle v, w\rangle z$,
$(v \times w) \times z = \langle v, z\rangle w - \langle w, z\rangle v$.

д) $|v \times w| = \sqrt{\langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}$.

4.10. Пусть $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Показать, что

$$|w_1 \times \ldots \times w_{n-1}| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

где $g_{ij} = \langle w_i, w_j\rangle$. (Указание: применить задачу 4.3 к надлежаще выбранному $(n-1)$-мерному подпространству в $\mathbf{R}^n$.)

4.11. Пусть T — внутреннее произведение на V. Линейное отображение $f\colon V \to V$ называется *самосопряженным* (относительно T), если $T(x, f(y)) = T(f(x), y)$ для всех $x, y \in V$. Показать, что если $A = (a_{ij})$ — матрица T относительно ортонормального базиса $v_1, \ldots, v_n$, то $a_{ij} = a_{ji}$.

4.12. Пусть $f_1, \ldots, f_{n-1}\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Определим $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ формулой $f_1 \times \ldots \times f_{n-1}(p) = f_1(p) \times \ldots \times f_{n-1}(p)$. Используя задачу 2.14, вывести формулу для $D(f_1 \times \ldots \times f_{n-1})$.

ПОЛЯ И ФОРМЫ

Пусть $p \in \mathbf{R}^n$. Множество всех пар (p, v), где v пробегает $\mathbf{R}^n$, будет обозначаться $\mathbf{R}^n_p$ и называться *касательным пространством* к $\mathbf{R}^n$ в точке p. Это множество можно очевидным образом превратить в векторное пространство, положив

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w),$$
$$a(p, v) = (p, av).$$

Вектор $v \in \mathbf{R}^n$ часто изображают в виде стрелки с началом 0 и концом v; вектор $(p, v) \in \mathbf{R}^n_p$ можно изображать (рис. 4.1) в виде стрелки с теми же направлением и длиной, но с начальной точкой p. Эта стрелка идет от p до $p + v$, и мы поэтому будем называть точку $p + v$ концом вектора (p, v). Вместо (p, v) мы будем обычно писать v_p (читается: вектор v, приложенный в p).

Векторное пространство $\mathbf{R}^n_p$ находится в столь близком родстве с $\mathbf{R}^n$, что многие структуры в $\mathbf{R}^n$ имеют аналоги в $\mathbf{R}^n_p$. В частности, стандартное *внутреннее произведение* $\langle\,,\rangle_p$ на $\mathbf{R}^n_p$ определяется равенством $\langle v_p, w_p\rangle_p = \langle v, w\rangle$, и за *стандартную ориентацию* на $\mathbf{R}_p^n$ принимается $[(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p]$.

Любая операция, возможная в векторном пространстве, может быть произведена в каждом $\mathbf{R}_p^n$, и бо́льшая часть этого параграфа представляет собой просто разработку

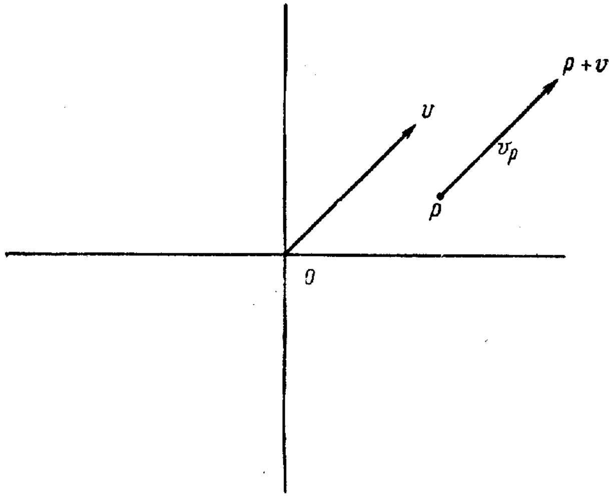


Рис. 4.1.

этой темы. Пожалуй, простейшей операцией в векторном пространстве является выбор в нем вектора. Если такой выбор произведен в каждом $\mathbf{R}_p^n$, то получаем *векторное поле* (рис. 4.2). Говоря более точно, векторное поле—это функция F, относящая каждому $p \in \mathbf{R}^n$ вектор $F(p) \in \mathbf{R}_p^n$. Для каждого p существуют тогда такие числа $F^1(p), \ldots$ $\ldots, F^n(p)$, что

$$F(p) = F^1(p) \cdot (e_1)_p + \ldots + F^n(p) \cdot (e_n)_p.$$

Таким образом мы получаем *n координатных функций* F^i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Векторное поле F называется непрерывным, дифференцируемым и т. д., если таковы функции F^i. Аналогичные определения могут быть даны для векторных полей, определенных на открытых подмножествах из $\mathbf{R}^n$. Операции над векторами порождают соответствующие операции над векторными полями, производимые

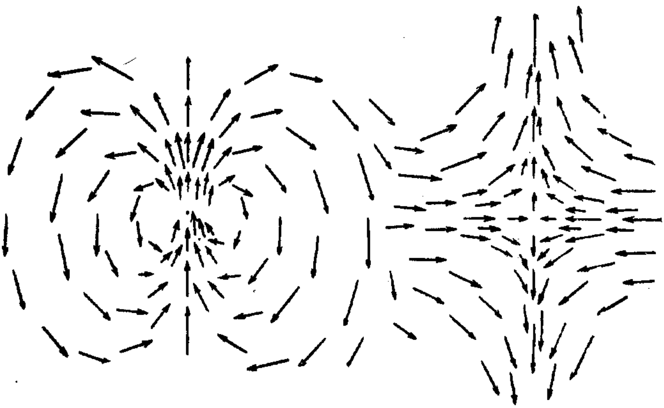


Рис. 4.2.

поточечно. Например, если F и G — векторные поля и f — функция, то полагаем по определению

$$(F+G)(p)=F(p)+G(p),$$

$$\langle F, G\rangle(p)=\langle F(p), G(p)\rangle,$$

$$(f\cdot F)(p)=f(p)F(p).$$

Если $F_1, \ldots, F_{n-1}$ — векторные поля на $\mathbf{R}^n$, то можно аналогичным образом положить по определению

$$(F_1\times \ldots \times F_{n-1})(p)=F_1(p)\times \ldots \times F_{n-1}(p).$$

Приведем еще несколько полезных стандартных определений. *Дивергенцией* $\operatorname{div} F$ поля F называют $\sum\limits_{i=1}^{n} D_iF^i$. Введя формальный символ

$$\nabla=\sum_{i=1}^{n} D_ie_i,$$

можно написать символически $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$. При $n=3$ пишем в соответствии с этой символикой

$$\begin{aligned}(\nabla \times F)(p) = {} & (D_2F^3 - D_3F^2)(e_1)_p + \\ & + (D_3F^1 - D_1F^3)(e_2)_p + \\ & + (D_1F^2 - D_2F^1)(e_3)_p.\end{aligned}$$

Векторное поле $\nabla \times F$ называется *вихрем* (или *ротором*) поля F и обозначается $\operatorname{curl} F$. Названия „дивергенция" и „вихрь" получены из физических соображений, которые будут указаны в конце книги.

Многие аналогичные рассмотрения могут быть применены к функции ω, относящей каждой точке $p \in \mathbf{R}^n$ тензор $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n_p)$; такая функция называется *формой k-й степени* на $\mathbf{R}^n$ или просто *дифференциальной формой*. Обозначая через $\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)$ базис, дуальный к $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$, имеем

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(p) \left[\varphi_{i_1}(p) \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(p)\right],$$

где $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$ — некоторые функции. Форма ω называется непрерывной, дифференцируемой и т. д., если таковы все функции $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$. Формы и векторные поля обычно будут неявно предполагаться дифференцируемыми, а под дифференцируемостью с этого момента будет подразумеваться принадлежность классу C^∞; это упрощающее предположение избавит нас от необходимости подсчитывать, сколько раз в процессе доказательства продифференцирована та или иная функция. Определения суммы $\omega + \eta$, произведения $f\omega$ и внешнего произведения $\omega \wedge \eta$ очевидны. Скалярная функция f рассматривается как форма нулевой степени, и $f\omega$ записывается также в виде $f \wedge \omega$.

Если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема, то $Df(p) \in \Lambda^1(\mathbf{R}^n)$. Небольшая модификация приводит тогда к форме первой степени df, определяемой равенством

$$df(p)(v_p) = Df(p)(v).$$

Рассмотрим, в частности, формы первой степени $d\pi^i$. Вошло в обычай пользоваться для функции π^i обозначением x^i (в случае $\mathbf{R}^3$ вместо x^1, x^2 и x^3 часто пишут x, y и z). Эта стандартная запись имеет очевидные недостатки, но она позволяет выражать многие классические результаты формулами столь же классического вида. Так как $dx^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = \pi^i(v) = v^i$, то мы видим, что $dx^1(p), \ldots, dx^n(p)$ есть не что иное, как базис, дуальный к $(e_1)_p, \ldots, (e_n)_p$. Таким образом, всякую форму k-й степени ω можно записать в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Особый интерес представляет выражение для df.

4.7. Теорема. *Если $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема, то*

$$df = D_1 f \cdot dx^1 + \ldots + D_n f \cdot dx^n.$$

В классической записи:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n.$$

Доказательство. $df(p)(v_p) = Df(p)(v) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) v^i = \sum_{i=1}^{n} D_i f(p) dx^i(p)(v_p). \ \blacksquare$$

Пусть теперь задано дифференцируемое отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Для всякого $p \in \mathbf{R}^n$ оно порождает линейное отображение $Df(p)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Вновь несколько модифицируя его, получаем линейное отображение $f_*\colon \mathbf{R}^n_p \to \mathbf{R}^m_{f(p)}$, определяемое равенством

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}.$$

Это линейное отображение индуцирует линейное отображение $f^*\colon \Lambda^k(\mathbf{R}^m_{f(p)}) \to \Lambda^k(\mathbf{R}^n_p)$. Поэтому каждой форме k-й степени ω на $\mathbf{R}^m$ можно отнести форму k-й степени $f^*\omega$ на $\mathbf{R}^n$, полагая $(f^*\omega)(p) = f^*(\omega(p))$, т. е.

$$f^*\omega(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \ldots, f_*(v_k))$$

для всякого набора $v_1, \ldots, v_k \in \mathbf{R}^n_p$[1]).

[1]) Если ω — форма нулевой степени, то под $f^*(\omega)$, естественно, понимается $\omega \circ f$. — *Прим. ред.*

В качестве противоядия к абстрактности этих определений приведем теорему, резюмирующую важные свойства отображения f^* и позволяющую в явном виде вычислять $f^*(\omega)$.

4.8. Теорема. *Если* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *дифференцируемо, то*

(1) $$f^*(dx^i) = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i \cdot dx^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j,$$

(2) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$,

(3) $f^*(g \cdot \omega) = (g \circ f) \cdot f^*(\omega)$,

(4) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$[1].

Доказательство.

(1) $$f^*(dx^i)(p)(v_p) = dx^i(f(p))(f_*(v_p)) =$$
$$= dx^i(f(p))(Df(p)(v))_{f(p)} =$$
$$= dx^i(f(p))\left(\sum_{j=1}^{n} D_j f^1(p) v^j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{n} D_j f^m(p) v^j\right)_{f(p)} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} D_j f^i(p) v^j = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i(p) dx^j(p)(v_p).$$

(2), (3) и (4) предоставляем доказать читателю. ∎

Повторно применяя теорему 4.8, получаем, например,
$$f^*(P\,dx^1 \wedge dx^2 + Q\,dx^2 \wedge dx^3) =$$
$$= (P \circ f)[f^*(dx^1) \wedge f^*(dx^2)] + (Q \circ f)[f^*(dx^2) \wedge f^*(dx^3)].$$

Выражение, получающееся при раскрытии каждого $f^*(dx^i)$, довольно сложно. (Полезно, однако, помнить, что $dx^i \wedge dx^i = (-1)\,dx^i \wedge dx^i = 0$.) Рассмотрим специальный случай, где стоит провести такое явное вычисление.

4.9. Теорема. *Если* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *дифференцируемо, то*
$$f^*(h\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (h \circ f)(\det f')\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Доказательство. Так как
$$f^*(h\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (h \circ f)\, f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n),$$

---

[1] Одним и тем же символом f^* обозначены здесь три, вообще говоря, разных отображения. — *Прим. ред.*

то достаточно показать, что

$$f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n) = (\det f')\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Пусть $p \in \mathbf{R}^n$ и $A = (a_{ij})$ — матрица $f'(p)$. Будем здесь и дальше, где это удобно и не может привести к путанице, опускать p в $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n(p)$ и подобных выражениях. Тогда

$$\begin{aligned} f^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(e_1, \ldots, e_n) &= \\ = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n (f_* e_1, \ldots, f_* e_n) &= \\ = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \left(\sum_{i=1}^n a_{1i} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{ni} e_i \right) &= \\ = \det(a_{ij}) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n (e_1, \ldots, e_n)&, \end{aligned}$$

согласно теореме 4.6. ∎

Важной конструкцией, связанной с формами, является обобщение оператора d, переводящего формы нулевой степени в формы первой степени. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Определим форму $(k+1)$-й степени $d\omega$, *дифференциал* ω, равенством

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} d\omega_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha (\omega_{i_1, \ldots, i_k}) \cdot dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

4.10. Теорема.

(1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$.

(2) *Если* ω — *форма* k-*й степени, то*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(3) $d(d\omega) = 0$. *Кратко*, $d^2 = 0$.

(4) *Если* ω — *форма* k-*й степени на* $\mathbf{R}^m$ *и* $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *дифференцируемо, то* $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.

Доказательство.

(1) Предоставляем читателю.

(2) Формула верна для $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и $\eta = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}$, поскольку все члены обращаются в 0. Справедливость формулы легко проверяется, когда ω — форма нулевой степени. Формула для общего случая получается из (1) и этих двух утверждений.

(3) Так как

$$d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

то

$$d(d\omega) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha, \beta}(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Но в этой сумме члены каждой пары

$$D_{\alpha, \beta}(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

и

$$D_{\beta, \alpha}(\omega_{i_1, \ldots, i_k}) dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

взаимно уничтожаются.

(4) Это очевидно, если ω — форма нулевой степени[1]). Предположим по индукции, что (4) верно, когда ω — форма k-й степени. Достаточно доказать (4) для формы $(k+1)$-й степени вида $\omega \wedge dx^i$. Имеем

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx^i)) &= f^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) = \\ &= f^*(d\omega \wedge dx^i) = f^*(d\omega) \wedge f^*(dx^i) = \\ &= d(f^*\omega \wedge f^*(dx^i)) = d(f^*(\omega \wedge dx^i)). \ \blacksquare \end{aligned}$$

---

[1]) Приведем все же доказательство. Применяя теоремы 4.7, 4.8 и 2.9, получаем

$$\begin{aligned} f^*(d\omega) = f^*\left(\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha\omega \cdot dx^\alpha\right) &= \sum_{\alpha=1}^{m} (D_\alpha\omega \circ f) f^*(dx^\alpha) = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{n} (D_\alpha\omega \circ f) D_\beta f^\alpha \cdot dx^\beta = \\ &= \sum_{\beta=1}^{n} D_\beta(\omega \circ f) dx^\beta = d(\omega \circ f) = d(f^*\omega). \end{aligned}$$

— *Прим. ред.*

Форма называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если $\omega = d\eta$ для некоторого η. Теорема 4.10 показывает, что всякая точная форма замкнута, и естественно спросить, не будет ли, и обратно, всякая замкнутая форма точна. Если ω — форма первой степени $P\,dx + Q\,dy$ на $\mathbf{R}^2$, то

$$d\omega = (D_1P\,dx + D_2P\,dy) \wedge dx + (D_1Q\,dx + D_2Q\,dy) \wedge dy = \\ = (D_1Q - D_2P)\,dx \wedge dy.$$

Таким образом, если $d\omega = 0$, то $D_1Q = D_2P$. Задачи 2.21 и 3.34 показывают, что на $\mathbf{R}^2$ существует такая форма нулевой степени f, что $\omega = df = D_1f\,dx + D_2f\,dy$. Однако если ω определено только на подмножестве $\mathbf{R}^2$, то такой функции может не существовать. Классическим примером является форма

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

определенная на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$. Эта форма обычно обозначается $d\theta$ (где θ определено в задаче 3.41), так как (задача 4.21) она равна $d\theta$ на области $\{(x, y)\colon x < 0$ или $x \geqslant 0$ и $y \neq 0\}$ определения θ. Заметим, однако, что θ нельзя определить непрерывным образом на всем множестве $R^2 \setminus 0$. Если $\omega = df$ для некоторой функции $f\colon \mathbf{R}^2 \setminus 0 \to \mathbf{R}$, то $D_1f = D_1\theta$ и $D_2f = D_2\theta$, так что $f = \theta + \mathrm{const}$, а это показывает, что такого f существовать не может.

Предположим, что $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,dx^i$ — форма первой степени на $\mathbf{R}^n$, оказавшаяся равной $df = \sum_{i=1}^{n} D_if\,dx^i$. Очевидно, можно считать, что $f(0) = 0$. Как в задаче 2.35, имеем

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} D_if(tx) \cdot x^i\,dt = \\ = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \cdot x^i\,dt.$$

Это наводит на мысль, что для отыскания f по заданному ω следует рассмотреть функцию $I\omega$, определяемую равенством

$$I\omega(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) \cdot x^i \, dt.$$

Заметим, что для того, чтобы определение $I\omega$ имело смысл, нужно лишь, чтобы ω было определено на открытом

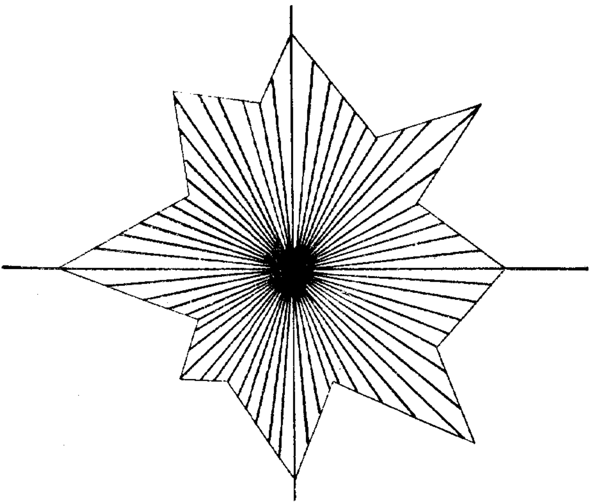


Рис. 4.3.

множестве $A \subset \mathbf{R}^n$, обладающем тем свойством, что вместе со всяким $x \in A$ весь прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и x, содержится в A. Такое открытое множество называется *звездным* относительно 0 (рис. 4.3). Довольно сложное вычисление показывает, что (на звездном открытом множестве) равенство $\omega = d(I\omega)$ действительно имеет место, лишь бы ω удовлетворяло необходимому условию $d\omega = 0$. Это вычисление, равно как и определение $I\omega$, можно значительно обобщить.

4.11. Теорема (лемма Пуанкаре). *Всякая замкнутая форма на открытом множестве $A \subset \mathbf{R}^n$, звездном относительно 0, точна.*

Доказательство. Мы определим функцию I, относящую всякой форме l-й степени некоторую форму $(l-1)$-й степени (для каждого l) так, что $I(0)=0$ и $\omega = I(d\omega)+d(I\omega)$ для всякой формы ω. При $d\omega=0$ будем иметь тогда $\omega = d(I\omega)$. Пусть

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l} \omega_{i_1,\ldots,i_l} dx^{i_1}\wedge \ldots \wedge dx^{i_l}.$$

Так как A звездно, то можно положить

$$I\omega(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\,dt\right)x^{i_\alpha}\times$$

$$\times dx^{i_1}\wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge \ldots \wedge dx^{i_l},$$

где символ $\frown$ над dx^{i_α} означает, что dx^{i_α} нужно опустить. Тождество $\omega = I(d\omega)+d(I\omega)$ доказывается прямым вычислением. Используя задачу 3.32, имеем

$$d(I\omega) = l\cdot\sum_{i_1<\ldots<i_l}\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\,dt\right)dx^{i_1}\wedge \ldots$$

$$\ldots\wedge dx^{i_l} +$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{l}D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)\,dt\right)\times$$

$$\times x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge \ldots \wedge dx^{i_l}.$$

(Почему вместо t^{l-1} появилось t^l?) С другой стороны,

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n} D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge \ldots \wedge dx^{i_l}$$

и, применяя I к форме $(l+1)$-й степени $d\omega$, получаем

$$I(d\omega)=\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^l D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)\,dt\right)x^j dx^{i_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge dx^{i_l}-$$

$$-\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{l}(-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^l D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)\,dt\right)\times$$

$$\times x^{i_\alpha}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_\alpha}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}.$$

При сложении полученных выражений тройные суммы взаимно уничтожаются и мы будем иметь

$$d(I\omega)+I(d\omega)=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_l} l\cdot\left(\int_0^1 t^{l-1}\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\,dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}+$$

$$+\sum_{i_1<\ldots<i_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^l x^j D_j\left(\omega_{i_1,\ldots,i_l}\right)(tx)dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_l}\left(\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^l\omega_{i_1,\ldots,i_l}(tx)\right]dt\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}=$$

$$=\sum_{i_1<\ldots<i_l}\omega_{i_1,\ldots,i_l}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_l}=\omega. \blacksquare$$

Задачи

4.13. а) Пусть $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ и $g\colon \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^p$. Показать, что $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$ и $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

б) Показать, что если $f, g\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, то $d(fg)=f\,dg+g\,df$.

4.14. Пусть c — дифференцируемая кривая в $\mathbf{R}^n$, т. е. дифференцируемая функция $c\colon [0, 1]\to\mathbf{R}^n$. Определим *касательный вектор* v к кривой c в точке t формулой $c_*((e_1)_t)=((c^1)'(t), \ldots, (c^n)'(t))_{c(t)}$. Показать, что если $f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, то касательным вектором к кривой $f\circ c$ в точке t служит $f_*(v)$.

4.15. Пусть $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ и кривая $c\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ определена формулой $c(t)=(t, f(t))$. Показать, что конец касательного вектора, проведенного к кривой c в точке t, лежит на касательной к графику f, проведенной в точке $(t, f(t))$.

4.16. Пусть кривая c: $[0, 1] \to \mathbf{R}^n$ такова, что $|c(t)| = 1$ для всех t. Показать, что $c(t)_{c(t)}$ и касательный вектор к c в точке t перпендикулярны.

4.17. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Определим векторное поле $\mathbf{f}$ формулой $\mathbf{f}(p) = f(p)_p \in \mathbf{R}^n_p$.

а) Показать, что любое векторное поле F на $\mathbf{R}^n$ есть поле вида $\mathbf{f}$ для некоторого f.

б) Показать, что $\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{tr} f'$ [1]).

4.18. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Определим векторное поле $\operatorname{grad} f$ формулой

$$(\operatorname{grad} f)(p) = D_1 f(p) \cdot (e_1)_p + \ldots + D_n f(p) \cdot (e_n)_p.$$

Очевидно, можно писать также $\operatorname{grad} f = \nabla f$. Полагая $\nabla f(p) = w_p$ доказать, что $D_v f(p) = \langle v, w \rangle$, и вывести отсюда, что $\nabla f(p)$ является направлением наиболее быстрого изменения функции f вблизи точки p.

4.19. Пусть F — векторное поле на $\mathbf{R}^3$. Определим формы

$$\omega^1_F = F^1\,dx + F^2\,dy + F^3\,dz,$$

$$\omega^2_F = F^1\,dy \wedge dz + F^2\,dz \wedge dx + F^3\,dx \wedge dy,$$

$$\omega^3_F = (F^1 + F^2 + F^3)\,dx \wedge dy \wedge dz.$$

а) Доказать, что

$$df = \omega^1_{\operatorname{grad} f},$$

$$d\left(\omega^1_F\right) = \omega^2_{\operatorname{curl} F},$$

$$d\left(\omega^2_F\right) = \omega^3_{\operatorname{div} F}.$$

б) Используя (а), доказать, что

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} F) = 0.$$

в) Показать, что если F — векторное поле на звездном открытом множестве A и $\operatorname{curl} F = 0$, то $F = \operatorname{grad} f$ для некоторой функции f: $A \to \mathbf{R}$. Аналогично, в случае $\operatorname{div} F = 0$ показать, что $F = \operatorname{curl} G$ для некоторого векторного поля G на A.

4.20. Пусть f: $U \to \mathbf{R}^n$ — дифференцируемая функция, имеющая дифференцируемую обратную f^{-1}: $f(U) \to \mathbf{R}^n$. Предположим, что всякая замкнутая форма на $f(U)$ точна. Показать, что то же верно для U. (Указание: при $d\omega = 0$ и $f^*\omega = d\eta$ рассмотреть $(f^{-1})^*\eta$.)

---

[1]) $\operatorname{tr} f'$ — след матрицы f' — определяется как сумма всех элементов, стоящих на главной диагонали. — *Прим. перев.*

4.21*. Доказать, что

$$d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

на всей области определения θ (задача 3.41).

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОМЕТРИИ

Сингулярным n-мерным кубом в A называется непрерывная функция c: $[0, 1]^n \to A$ (где $[0, 1]^n$ означает n-кратное произведение $[0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$ и A — открытое множество в $\mathbf{R}^m$ с $m \geqslant n$). Обычно $\mathbf{R}^0$ и $[0, 1]^0$ обозначаются символом $\{0\}$. Тогда сингулярный нульмерный куб в A есть функция f: $\{0\} \to A$, или, что то же самое, — точка в A. Сингулярный одномерный куб часто называют *кривой*. Особенно простым, но и особенно важным примером сингулярного n-мерного куба является *стандартный n-мерный куб* I^n: $[0, 1]^n \to \mathbf{R}^n$, определяемый равенством $I^n(x) = x$ для всех $x \in [0, 1]^n$.

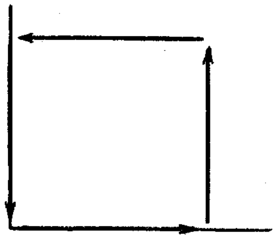
Нам нужно будет рассматривать формальные суммы сингулярных n-мерных кубов в A, умноженных на целые коэффициенты, т. е. выражения вида

$$2c_1 + 3c_2 - 4c_3,$$

где c_1, c_2 и c_3 — сингулярные n-мерные кубы в A. Такая конечная сумма сингулярных n-мерных кубов с целыми коэффициентами называется сингулярной *n-мерной цепью* в A. В частности, сингулярный n-мерный куб c рассматривается также как сингулярная n-мерная цепь $1 \cdot c$. Сингулярные n-мерные цепи можно естественным образом складывать и умножать на целые числа. Например,

$$2(c_1 + 3c_4) + (-2)(c_1 + c_3 + c_2) = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4.$$

Для каждой сингулярной n-мерной цепи c в A мы определим сингулярную $(n-1)$-мерную цепь в A, называемую *границей* цепи c и обозначаемую ∂c. Границу для I^2, например, можно было бы определить как сумму четырех сингулярных одномерных кубов, проходимых против часовой стрелки вдоль границы $[0, 1]^2$, как указано на рис. 4.4, *а*. Но на самом деле значительно удобнее определять ∂I^2 как сумму с указанными коэффициентами четырех сингулярных одномерных кубов, изображенных на рис. 4.4, *б*. Точное определение ∂I^n требует некоторых предварительных понятий. Для каждого индекса i от 1 до n определим два



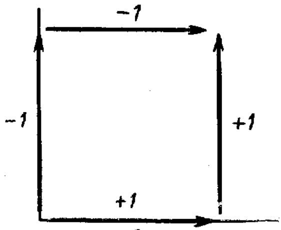


Рис. 4.4.

сингулярных $(n-1)$-мерных куба $I^n_{(i,\,0)}$ и $I^n_{(i,\,1)}$ следующим образом. Для каждого $x \in [0,\,1]^{n-1}$ положим

$$I^n_{(i,\,0)}(x) = I^n(x^1,\,\ldots,\,x^{i-1},\,0,\,x^i,\,\ldots,\,x^{n-1}) = \\ = (x^1,\,\ldots,\,x^{i-1},\,0,\,x^i,\,\ldots,\,x^{n-1}),$$

$$I^n_{(i,\,1)}(x) = I^n(x^1,\,\ldots,\,x^{i-1},\,1,\,x^i,\,\ldots,\,x^{n-1}) = \\ = (x^1,\,\ldots,\,x^{i-1},\,1,\,x^i,\,\ldots,\,x^{n-1}).$$

Назовем $I^n_{(i,\,0)}$ $(i,\,0)$-гранью I^n, а $I^n_{(i,\,1)}$ $(i,\,1)$-гранью (рис. 4.5) и положим

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,\,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\,\alpha)}.$$

Для произвольного сингулярного n-мерного куба c: $[0,\,1]^n \to A$ мы сначала определим $(i,\,\alpha)$-грань

$$c_{(i,\,\alpha)} = c \circ \left(I^n_{(i,\,\alpha)}\right)$$

и затем положим

$$\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,\,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\,\alpha)}.$$

Наконец, определим границу сингулярной n-мерной цепи $\sum a_i c_i$ формулой

$$\partial\left(\sum a_i c_i\right) = \sum a_i \partial(c_i).$$

Хотя этих нескольких определений достаточно для всех приложений в этой книге, мы приведем еще одно типичное свойство символа ∂.

4.12. Теорема. *$\partial(\partial c) = 0$ для всякой сингулярной n-мерной цепи c в A. Коротко, $\partial^2 = 0$.*

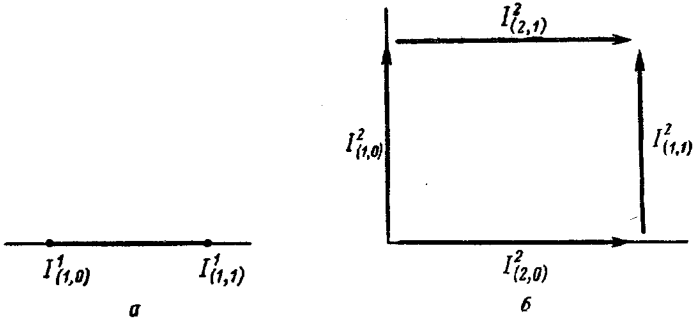


Рис. 4.5.

Доказательство. Пусть $i \leqslant j$. Рассмотрим $\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$. Если $x \in [0, 1]^{n-2}$, то, вспоминая определение (j, β)-грани сингулярного n-мерного куба, имеем

$$\begin{aligned}\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}(x) &= I^n_{(i,\alpha)}\left(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x)\right) = \\ &= I^n_{(i,\alpha)}\left(x^1, \ldots, x^{j-1}, \beta, x^j, \ldots, x^{n-2}\right) = \\ &= I^n\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \ldots, x^{j-1}, \beta, x^j, \ldots, x^{n-2}\right).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\left(I^n_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)} &= I^n_{(j+1,\beta)}\left(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x)\right) = \\ &= I^n_{(j+1,\beta)}\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \ldots, x^{n-2}\right) = \\ &= I^n\left(x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \ldots, x^{j-1}, \beta, x^j, \ldots, x^{n-2}\right).\end{aligned}$$

Таким образом, $\left(I^n_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)} = \left(I^n_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ при $i \leqslant j$. (Полезно проверить это на рис. 4.5.) Отсюда легко следует, что $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)} = \left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ при $i \leqslant j$ для любого сингулярного n-мерного куба c. Но

$$\partial(\partial c)=\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0,1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}.$$

В эту сумму $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$ и $\left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$, где $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1$, входят с противоположными знаками. Поэтому [1]) все члены попарно взаимно уничтожаются и $\partial(\partial c)=0$. Поскольку теорема верна для всякого сингулярного n-мерного куба, она верна также для любой сингулярной n-мерной цепи. ▌

Естественно задаться вопросом, верно ли обращение теоремы 4.12, т. е. всегда ли при $\partial c=0$ имеется сингулярная n-мерная цепь c' в A, такая, что $c=\partial c'$. Ответ зависит от A и, вообще говоря, отрицателен. Например, пусть c: $[0,1]\to\mathbf{R}^2\setminus 0$ определено равенством $c(t)=(\sin 2\pi nt, \cos 2\pi nt)$, где n — ненулевое целое. Тогда $c(1)=c(0)$, так что $\partial c=0$. Но (задача 4.26) не существует никакой сингулярной двумерной цепи c' в $\mathbf{R}^2\setminus 0$, для которой бы $\partial c'=c$.

Задачи

4.22. Пусть $\mathscr{S}$ — множество всех сингулярных n-мерных кубов и $\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел. *Сингулярная n-мерная цепь* [2]) есть такая функция f: $\mathscr{S}\to\mathbf{Z}$, что $f(c)=0$ для всех, кроме конечного множества сингулярных n-мерных кубов c. Определим $f+g$ и nf формулами $(f+g)(c)=f(c)+g(c)$ и $(nf)(c)=nf(c)$. Показать, что $f+g$ и nf принадлежат $\mathscr{S}$. Для всякого $c\in\mathscr{S}$ мы будем обозначать через c также такую функцию f, что $f(c)=1$ и $f(c')=0$ для всех $c'\neq c$. Показать, что всякая сингулярная n-мерная цепь f может быть записана в виде $a_1c_1+\ldots+a_kc_k$ с некоторыми целыми коэффициентами $a_1,\ldots,a_k$ и сингулярными n-мерными кубами $c_1,\ldots,c_k$.

4.23. Определим для заданных $R>0$ и $n\neq 0$ сингулярный одномерный куб $c_{R,n}$: $[0,1]\to\mathbf{R}^2\setminus 0$ формулой $c_{R,n}(t)=(R\cos 2\pi nt, R\sin 2\pi nt)$. Показать, что существует сингулярный

---

[1]) Легко проверить, что $\{(k,l)\colon 1\leqslant k\leqslant n,\ 1\leqslant l\leqslant n-1\}$ распадается на пары (i,j), $(j+1,i)$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1)$. — *Прим. ред.*

[2]) По общепринятой терминологии это не цепь, а коцепь. — *Прим. ред.*

двумерный куб c: $[0, 1]^2 \to \mathbf{R}^2 \setminus 0$, для которого $c_{R_1, n} - c_{R_2, n} = \partial c$.

4.24. Показать, что если c — сингулярный одномерный куб в $\mathbf{R}^2 \setminus 0$, у которого $c(0) = c(1)$, то существует такое целое n, что $c - c_{1,n} = \partial c^2$ для некоторого двумерного куба c^2. (Указание: сначала разбить $[0, 1]$ так, чтобы каждое $c([t_{i-1}, t_i])$ лежало по одну сторону от некоторой прямой, проходящей через 0.)

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Тот факт, что $d^2 = 0$ и $\partial^2 = 0$, не говоря уже о типографской схожести символов ∂ и d, наводит на мысль, что между формами и цепями существует какая-то связь. Эта связь устанавливается интегрированием форм по цепям. В дальнейшем будут рассматриваться только дифференцируемые сингулярные n-мерные кубы.

Пусть ω — форма k-й степени на $[0, 1]^k$. Тогда $\omega = f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ с однозначно определенной функцией f. Мы положим

$$\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f.$$

Это равенство можно было бы записать также в виде

$$\int_{[0,1]^k} f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k$$

— это одно из оснований для введения функций x^i. Если теперь ω — форма k-й степени на A, а c — сингулярный k-мерный куб в A, то мы положим

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega.$$

Заметим, что, в частности,

$$\int_{I^k} f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = \int_{[0,1]^k} (I^k)^*(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$

$$= \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

Особое определение требуется для случая $k=0$. Форма ω нулевой степени есть функция. Для каждого сингулярного нульмерного куба c: $\{0\} \to A$ в A положим

$$\int_c \omega = \omega(c(0)).$$

Наконец, интеграл от ω по сингулярной k-мерной цепи $c = \sum a_i c_i$ определим формулой

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega.$$

Интеграл от формы первой степени по сингулярной одномерной цепи часто называют *криволинейным интегралом.* Если $P\,dx + Q\,dy$ — форма первой степени на $\mathbf{R}^2$ и c: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ — сингулярный одномерный куб (кривая), то можно доказать (но мы не будем этого делать), что

$$\int_c P\,dx + Q\,dy = \lim \sum_{i=1}^{n} [c^1(t_i) - c^1(t_{i-1})]\, P(t^i) + \\ + [c^2(t_i) - c^2(t_{i-1})]\, Q(t^i),$$

где $t_0, \ldots, t_n$ — разбиение отрезка $[0, 1]$, t^i произвольно выбрано в $[t_{i-1}, t_i]$ и предел берется по всем разбиениям при стремлении к 0 наибольшего из $|t_i - t_{i-1}|$. Правую часть часто принимают за определение $\int_c P\,dx + Q\,dy$. Такое определение естественно, поскольку входящие в него суммы очень похожи на суммы, входящие в определение обычного интеграла. Однако с подобным выражением почти невозможно работать, и его быстро преобразуют в интеграл, эквивалентный $\int_{[0,1]} c^*(P\,dx + Q\,dy)$. Аналогичные определения для *интегралов по поверхности*, т. е. интегралов от форм второй степени по сингулярным двумерным кубам, еще более сложны и трудноприменимы. Это одна из причин того, что мы уклонились от такого подхода. Другая причина заключается в том, что данное здесь определение сохраняет смысл и в более общей ситуации, рассматриваемой в гл. 5.

Связь между формами, цепями, d и ∂ наиболее четко выражается теоремой Стокса, которую часто называют основной теоремой многомерного анализа (при $k=1$ и $c=I^1$ это действительно основная теорема дифференциального и интегрального исчисления).

4.13. Теорема Стокса. *Пусть* ω — *форма* $(k-1)$-*й степени на* A *и* c — *сингулярная* k-*мерная цепь в* A. *Тогда*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $c = I^k$ и ω — форма $(k-1)$-й степени на $[0, 1]^k$. Тогда ω есть сумма форм $(k-1)$-й степени вида

$$f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k$$

и достаточно доказать теорему для каждой из них. А это достигается непосредственным вычислением.

Заметим, что

$$\int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(j,\alpha)}\left(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq i, \\ \displaystyle\int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, \alpha, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k & \text{при} \quad j = i. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_{\partial I^k} f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(j,\alpha)}\left(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k\right) =$$

$$= (-1)^{i+1} \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k +$$

$$+ (-1)^i \int_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k}) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]^k} D_i f\,dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{[0,1]^k} D_i f.$$

Применяя теорему Фубини и теорему Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int\limits_{I^k} d(f\,dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k) =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_0^1 \ldots \left(\int\limits_0^1 D_i f(x^1, \ldots, x^k)\,dx^i\right) \times$$

$$\times\, dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 [f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) -$$

$$- f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)]\,dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k +$$

$$+ (-1)^i \int\limits_{[0,1]^k} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)\,dx^1 \ldots dx^k.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{I^k} d\omega = \int\limits_{\partial I^k} \omega.$$

Если теперь c — произвольный сингулярный k-мерный куб, то из определений следует, что

$$\int\limits_{\partial c} \omega = \int\limits_{\partial I^k} c^*\omega.$$

Поэтому

$$\int\limits_{c} d\omega = \int\limits_{I^k} c^*(d\omega) = \int\limits_{I^k} d(c^*\omega) = \int\limits_{\partial I^k} c^*\omega = \int\limits_{\partial c} \omega.$$

Наконец, для произвольной сингулярной k-мерной цепи $\sum a_i c_i$ имеем

$$\int\limits_{c} d\omega = \sum a_i \int\limits_{c_i} d\omega = \sum a_i \int\limits_{\partial c_i} \omega = \int\limits_{\partial c} \omega. \blacksquare$$

Теорема Стокса обладает тремя важными характерными признаками многих больших теорем.

1. Она тривиальна.

2. Тривиальна она потому, что все входящие в нее выражения определены надлежащим образом.

3. Она имеет важные следствия.

Так как вся эта глава по сути дела состоит из определений, которые сделали возможными формулировку и доказательство теоремы Стокса, то читатель охотно признает за теоремой Стокса первые два из этих признаков. Остающаяся часть книги посвящена подтверждению третьего.

Задачи

4.25. (*Независимость от способа параметризации.*) Пусть c — сингулярный k-мерный куб и p: $[0, 1]^k \to [0, 1]^k$ — такое взаимно однозначное отображение, что $p([0, 1]^k) = [0, 1]^k$ и $\det p'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0, 1]^k$. Показать, что

$$\int\limits_{c} \omega = \int\limits_{c \circ p} \omega$$

для любой формы k-й степени ω.

4.26. Показать, что $\int\limits_{c_{R,n}} d\theta = 2\pi n$, и, используя теорему Стокса, вывести отсюда, что $c_{R,n} \neq \partial c$ для всякой сингулярной двумерной цепи c в $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ (напомним, что $c_{R,n}$ было определено в задаче **4.23**).

4.27. Показать, что целое n в задаче 4.24 единственно. Это число называется *порядком* кривой c относительно 0.

4.28. Напомним, что $\mathbf{C}$ обозначает множество всех комплексных чисел. Пусть $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ задано равенством $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$. Определим сингулярный одномерный куб $c_{R,f}\colon [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus 0$ формулой $c_{R,f} = f \circ c_{R,1}$ и сингулярный двумерный куб c равенством $c(s, t) = tc_{R,n}(s) + (1-t)\,c_{R,f}(s)$.

а) Показать, что $\partial c = c_{R,f} - c_{R,n}$ и что $c([0, 1] \times [0, 1]) \subset \mathbf{C} \setminus 0$, если R достаточно велико.

б) Используя задачу 4.26, доказать *основную теорему алгебры*: всякий полином $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ с коэффициентами $a_i \in \mathbf{C}$ имеет корень в $\mathbf{C}$.

4.29. Пусть ω — форма первой степени $f\,dx$ на $[0, 1]$ и $f(0) = f(1)$. Показать, что существует единственное число λ, такое, что $\omega - \lambda\,dx = dg$ для некоторой функции g, у которой $g(0) = g(1)$. (Указание: для нахождения λ проинтегрировать $\omega - \lambda\,dx = dg$ на $[0, 1]$.)

4.30. Пусть ω — замкнутая форма первой степени на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$. Доказать, что

$$\omega = \lambda\,d\theta + dg$$

для некоторых $\lambda \in \mathbf{R}$ и $g\colon \mathbf{R}^2 \setminus 0 \to \mathbf{R}$. (Указание: показать, что все числа λ_R в $c_R{}^*(\omega) = \lambda_R\,dx + d(g_R)$ имеют одно и то же значение λ.)

4.31. Показать, что если $\omega \neq 0$, то существует цепь c, для которой $\int\limits_c \omega \neq 0$. Используя этот факт, теорему Стокса и равенство $\partial^2 = 0$, доказать, что $d^2 = 0$.

4.32. а) Пусть c_1, c_2 — такие сингулярные одномерные кубы, что $c_1(0) = c_2(0)$ и $c_1(1) = c_2(1)$. Показать, что существует сингулярный двумерный куб c, у которого $\partial c = c_1 - c_2 + c_3 + c_4$, где c_3 и c_4 — *вырожденные* кубы, т. е. $c_3[0, 1]$ и $c_4[0, 1]$ — точки. Вывести отсюда, что если форма ω точна, то $\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{c_2} \omega$. Дать контрпример на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$ для случая, когда ω лишь замкнута.

б) Показать, что если ω — такая форма на подмножестве $\mathbf{R}^2$, что $\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{c_2} \omega$ для всех c_1 и c_2, у которых $c_1(0) = c_2(0)$ и $c_1(1) = c_2(1)$, то ω точна. (Указание: рассмотреть задачи 2.21 и 3.34.)

4.33. (*Элементы теории функций комплексного переменного.*) Функцию $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ называют *дифференцируемой* в точке $z_0 \in \mathbf{C}$, если существует предел

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

(Под знаком предела — отношение двух комплексных чисел, так что это определение совершенно отлично от данного в гл. 2.) Если f дифференцируема в каждой точке z открытого множества A и f' непрерывна на A, то функцию f называют *аналитической* на A.

а) Показать, что функция $f(z) = z$ аналитична, а $f(z) = \bar{z}$ (где $\overline{x + iy} = x - iy$) нет. Показать, что сумма, произведение и частное аналитических функций — аналитические функции.

б) Показать, что если $f = u + iv$ аналитична на A, то u и v удовлетворяют *условиям Коши — Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Указание: воспользоваться тем фактом, что

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

должен быть одним и тем же для $z = z_0 + (x + i0)$ и $z = z_0 + (0 + iy)$ с $x, y \to 0$ (если u и v непрерывно дифференцируемы, то верно также обратное утверждение, но его труднее доказать).)

в) Пусть $T\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ — линейное отображение (где $\mathbf{C}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbf{R}$). Показать, что если матрица T относительно базиса $(1, i)$ равна $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$, то T есть оператор умножения на некоторое комплексное число тогда и только тогда, когда $a = d$ и $b = -c$. Пункт б) показывает, что аналитическая функция $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, рассматриваемая как функция $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, имеет производную $Df(z_0)$, являющуюся оператором умножения на комплексное число. Что это за комплексное число?

г) Положим

$$d(\omega + i\eta) = d\omega + i\,d\eta,$$

$$\int_c \omega + i\eta = \int_c \omega + i \int_c \eta,$$

$$(\omega + i\eta) \wedge (\theta + i\lambda) = \omega \wedge \theta - \eta \wedge \lambda + i(\eta \wedge \theta + \omega \wedge \lambda)$$

и

$$dz = dx + i\,dy.$$

Показать, что $d(f\,dz) = 0$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям Коши — Римана.

д) Доказать *интегральную теорему Коши:* если f аналитична на A, то $\int_c f\,dz = 0$ для всякой замкнутой кривой c (сингулярного одномерного куба c, у которого $c(0) = c(1)$), такой, что $c = \partial c'$ для некоторого сингулярного двумерного куба c' в A.

е) Показать, что если $g(z) = 1/z$, то $g\,dz$ (или $(1/z)\,dz$ в классической записи) равно $i\,d\theta + dh$ для некоторой функции $h\colon \mathbf{C} \setminus 0 \to \mathbf{R}$. Вывести отсюда, что $\int\limits_{c_{R,n}} (1/z)\,dz = 2\pi i n$.

ж) Пусть f аналитична на $\{z\colon |z| < 1\}$. Используя тот факт, что $g(z) = f(z)/z$ аналитична на $\{z\colon 0 < |z| < 1\}$, показать, что

$$\int\limits_{c_{R_1,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int\limits_{c_{R_2,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz,$$

если $0 < R_1, R_2 < 1$.

Используя е), вычислить

$$\lim_{R \to 0} \int\limits_{c_{R,n}} \frac{f(z)}{z}\,dz$$

и вывести отсюда *интегральную формулу Коши*: Если f аналитична на $\{z\colon |z| \leqslant 1\}$ и c — замкнутая кривая в $\{z\colon 0 < |z| < 1\}$, имеющая порядок n относительно 0, то

$$nf(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_c \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

4.34. Пусть $F\colon [0, 1]^2 \to \mathbf{R}^3$. Для каждого $s \in [0, 1]$ определим $F_s\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ формулой $F_s(t) = F(s, t)$. Если каждое F_s есть замкнутая кривая, то F называют *гомотопией* между замкнутой кривой F_0 и замкнутой кривой F_1. Пусть F и G — гомотопии между замкнутыми кривыми. Если для каждого s замкнутые кривые F_s и G_s не пересекаются, то пара (F, G) называется гомотопией между парами непересекающихся замкнутых кривых F_0,

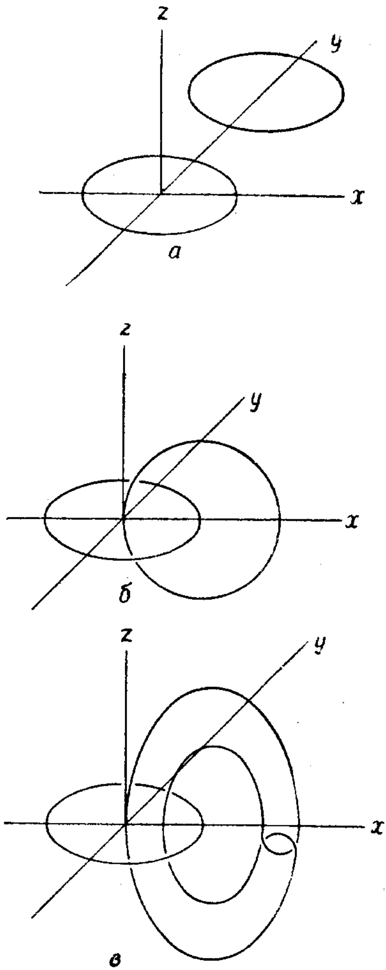


Рис. 4.6.

G_0 и F_1, G_1. Интуитивно ясно, что такой гомотопии не существует, если F_0, G_0 — пара кривых, изображенная на рис. 4.6, *а*, а F_1, G_1 — пара из *б* или *в*. Предлагаемая задача и задача 5.33 доказывают это для случая *б*, но доказательство для случая *в* требует другой техники.

а) Пусть f, g: $[0, 1] \to \mathbf{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим $c_{f,g}$: $[0, 1]^2 \to \mathbf{R}^3 \setminus 0$ формулой

$$c_{f,g}(u, v) = f(u) - g(v).$$

Если (F, G) — гомотопия между непересекающимися замкнутыми кривыми, определим $C_{F,G}$: $[0, 1]^3 \to \mathbf{R}^3 \setminus 0$ формулой

$$C_{F,G}(s, u, v) = c_{F_s, G_s}(u, v) = F(s, u) - G(s, v).$$

Показать, что $\partial C_{F,G} = c_{F_0, G_0} - c_{F_1, G_1}$.

б) Пусть ω — замкнутая форма второй степени на $\mathbf{R}^3 \setminus 0$. Показать, что

$$\int\limits_{c_{F_0, G_0}} \omega = \int\limits_{c_{F_1, G_1}} \omega.$$