5

Интегрирование на многообразиях

МНОГООБРАЗИЯ

Пусть U и V — открытые множества в $\mathbf{R}^n$. Дифференцируемую функцию $h\colon U \to V$, имеющую дифференцируемую обратную $h^{-1}\colon V \to U$, будем называть *диффеоморфизмом*.

Подмножество M в $\mathbf{R}^n$ называется *k-мерным многообразием* (в $\mathbf{R}^n$), если для всякой точки $x \in M$ выполнено следующее условие:

(M) Существуют открытое множество U, содержащее x, открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$ и диффеоморфизм $h\colon U \to V$, такие, что

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{R}^k \times \{0\}) = \\ = \{x \in V\colon\ x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

Другими словами, $U \cap M$ „с точностью до диффеоморфизма" есть просто часть пространства $\mathbf{R}^k \times \{0\}$ (см. рис. 5.1). Отметим два крайних случая нашего определения: точка в $\mathbf{R}^n$ есть нульмерное многообразие, а открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$ есть n-мерное многообразие.

Общеизвестным примером n-мерного многообразия является *n-мерная сфера S^n*, определяемая как множество $\{x \in \mathbf{R}^{n+1}\colon |x| = 1\}$. Доказательство выполнения условия (M) оставляем в качестве упражнения читателю. Если же читатель не расположен утруждать себя деталями, то он может воспользоваться следующей теоремой, доставляющей много примеров многообразий (заметим, что $S^n = g^{-1}(0)$, где $g\colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ определено равенством $g(x) = |x|^2 - 1$).

5.1. Теорема. *Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество и $g\colon A \to \mathbf{R}^p$ — такая дифференцируемая функция, что $g'(x)$ имеет ранг p для всех точек x, в которых $g(x) = 0$. Тогда $g^{-1}(0)$ есть $(n-p)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$.*

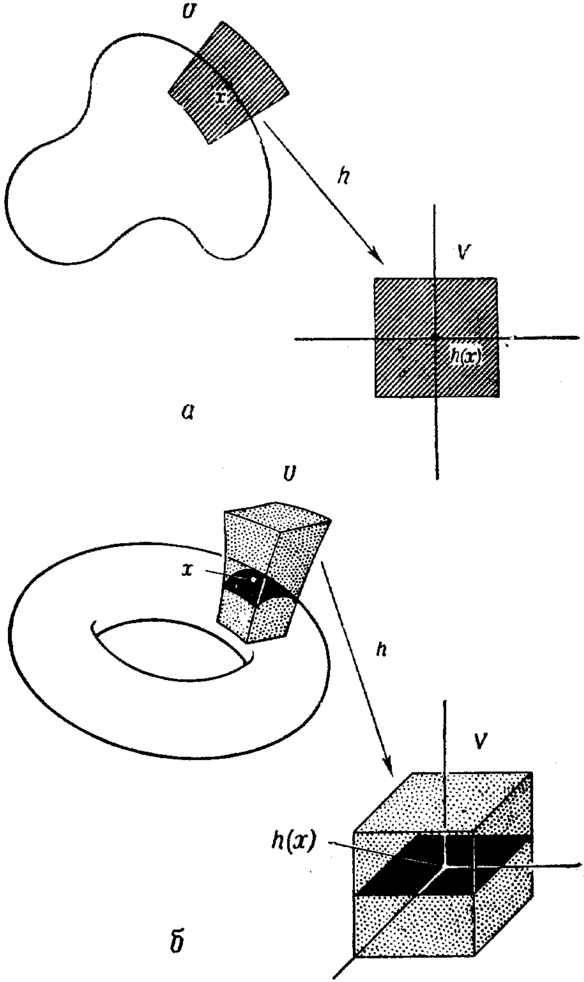


Рис. 5.1 Одномерное многообразие в $\mathbf{R}^2$ и двумерное многообразие в $\mathbf{R}^3$.

Доказательство. Справедливость утверждения непосредственно следует из теоремы 2.13 [1]. ∎

5.2. Теорема. *Для всякой точки x k-мерного многообразия $M \subset \mathbf{R}^n$ выполнено следующее „координатное условие".*

(C) *Существуют открытое множество U, содержащее x, открытое множество $W \subset \mathbf{R}^k$ и взаимно однозначная дифференцируемая функция $f: W \to \mathbf{R}^n$, такие, что*

1) $f(W) = M \cap U$,

2) $f'(y)$ *имеет ранг k для всякого $y \in W$.*

[Такая функция f называется *системой координат* в окрестности точки x (см. рис. 5.2).]

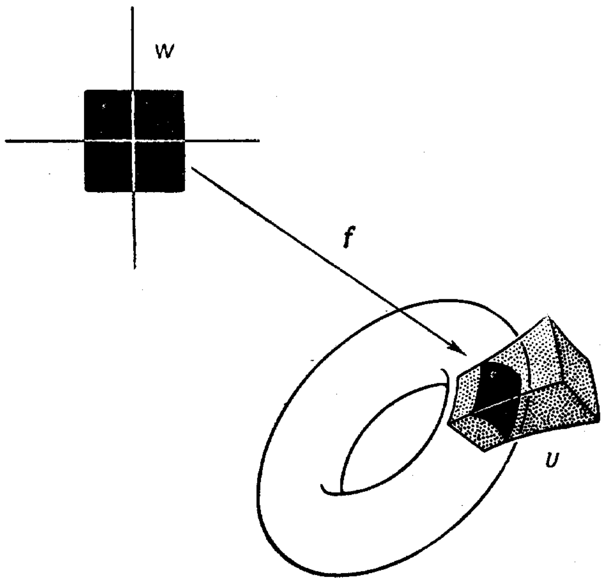


Рис. 5.2.

[1]) Нужно только при проверке выполнения условия (M) для $M = g^{-1}(0)$ и $k = n - p$ взять h обратным фигурирующему в теореме 2.13. — *Прим. перев.*

Доказательство. Рассмотрим h: $U \to V$, удовлетворяющее условию (М). Пусть $W = \{a \in \mathbf{R}^k: (a, 0) \in h(M)\}$. Определим f: $\to \mathbf{R}^n$ равенством $f(a) = h^{-1}(a, 0)$. Очевидно, $f(W) = M \cap U$. Если H: $U \to \mathbf{R}^k$ определить равенством $H(z) = (h^1(z), \ldots, h^k(z))$, то $H(f(y)) = y$ для всех $y \in W$; поэтому $H'(f(y)) \cdot f'(y) = I$, и матрица $f'(y)$ должна иметь ранг k. ▮

Отметим одно следствие доказательства теоремы 5.2: для всяких двух систем координат f_1: $W_1 \to \mathbf{R}^n$ и f_2: $W_2 \to \mathbf{R}^n$ отображение

$$f_2^{-1} \circ f_1: f_1^{-1}(f_2(W_2)) \to \mathbf{R}^k$$

дифференцируемо и имеет невырожденный якобиан. В самом деле, $f_2^{-1}(x)$ состоит из первых k компонент отображения $h(x)$.

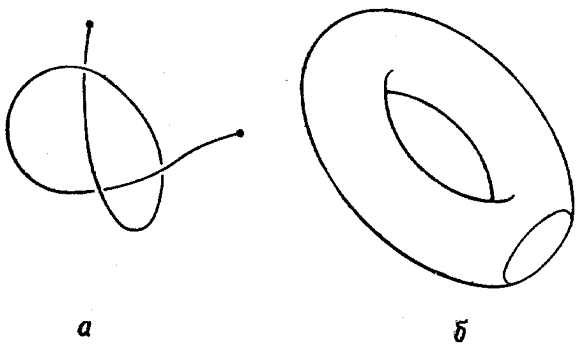


Рис. 5.3. Одномерное и двумерное многообразия с краем в $\mathbf{R}^3$.

Полупространством $\mathbf{H}^k \subset \mathbf{R}^k$ будет называться множество $\{x \in \mathbf{R}^k: x^k \geqslant 0\}$. Подмножество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется ***k*-мерным многообразием с краем** (рис. 5.3), если для всякой точки $x \in M$ выполняется либо условие (М), либо следующее условие.

(M') Существуют открытое множество U, содержащее x, открытое множество $V \subset \mathbf{R}^n$ и диффеоморфизм h: $U \to V$, такие, что

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbf{H}^k \times \{0\}) =$$
$$= \{x \in V:\ x^k \geqslant 0 \text{ и } x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

Важно заметить, что условия (M) и (M') не могут одновременно выполняться для одной и той же точки x. Действительно, если бы h_1: $U_1 \to V_1$ и h_2: $U_2 \to V_2$ удовлетворяли соответственно условиям (M) и (M'), то $h_2 \circ h_1^{-1}$ было бы дифференцируемым отображением, переводящим открытое множество из $\mathbf{R}^k$, содержащее $h(x)$, в подмножество $\mathbf{H}^k$, не являющееся открытым в $\mathbf{R}^k$. Но поскольку $\det(h_2 \circ h_1^{-1})' \neq 0$, это противоречило бы результату из задачи 2.36. Множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих условию (M'), называется *краем* многообразия M' и обозначается ∂M. Его не следует путать с границей множества, определявшейся в гл. 1 (см. задачи 5.3 и 5.8).

Задачи

5.1. Пусть M есть k-мерное многообразие с краем. Доказать, что ∂M есть $(k-1)$-мерное, а $M \setminus \partial M$ есть k-мерное многообразия.

5.2. Найти аналог условия (C) для многообразий с краем.

5.3. а) Пусть $A \subset \mathbf{R}^n$ — открытое множество, граница которого является $(n-1)$-мерным многообразием. Показать, что объединение N множества A с его границей есть n-мерное многообразие с краем. (Полезно иметь в виду следующий пример: если $A = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| < 1 \text{ или } 1 < |x| < 2\}$, то N есть многообразие с краем, но ∂N не совпадает с границей A.)

б) Доказать аналогичное утверждение для открытого подмножества n-мерного многообразия.

5.4. Доказать частичное обращение теоремы 5.1: для всякой точки x k-мерного многообразия $M \subset \mathbf{R}^n$ существуют такое открытое множество $A \subset \mathbf{R}^n$ и такая функция g: $A \to \mathbf{R}^{n-k}$, что $A \cap M = g^{-1}(0)$ и $g'(x)$ имеет ранг $n-k$ всюду, где $g(x) = 0$.

5.5. Доказать, что k-мерное (векторное) подпространство в $\mathbf{R}^n$ есть k-мерное многообразие.

5.6. Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. *Графиком* f называется множество $\{(x, y)\colon y = f(x)\} \subset R^n \times R^m$. Показать, что график f является n-мерным многообразием тогда и только тогда, когда f дифференцируемо.

5.7. Пусть $\mathbf{K}^n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon x^1 = 0$ и $x^2, \ldots, x^{n-1} > 0\}$. Показать, что если $M \subset \mathbf{K}^n$ есть k-мерное многообразие и N получается вращением M вокруг оси $x^1 = \ldots = x^k = 0$, то N есть $(k+1)$-мерное многообразие. Пример — тор (рис. 5.4).

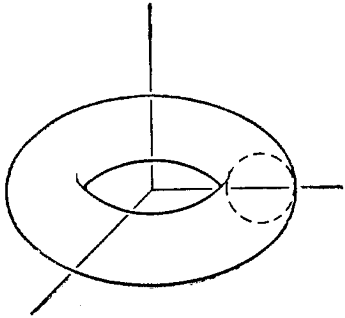


Рис. 5.4.

5.8. а) Показать, что если M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и $k < n$, то M имеет меру 0.

б) Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{R}^n$. Показать, что граница M совпадает с ∂M. Дать контрпример для случая незамкнутого M.

в) Показать, что всякое компактное n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{R}^n$ измеримо по Жордану.

ПОЛЯ И ФОРМЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат в окрестности точки $x = f(a)$. Так как ранг матрицы $f'(a)$ равен k, то линейное отображение $f_*\colon \mathbf{R}^k_a \to \mathbf{R}^n_x$ взаимно однозначно и $f_*(\mathbf{R}^k_a)$ есть k-мерное подпространство в $\mathbf{R}^n_x$. Если $g\colon V \to \mathbf{R}^n$ — еще одна система координат с $x = g(b)$, то

$$g_*(\mathbf{R}^k_b) = f_*(f^{-1} \circ g)_*(\mathbf{R}^k_b) = f_*(\mathbf{R}^k_a).$$

Таким образом, k-мерное подпространство $f_*(\mathbf{R}^k_a)$ не зависит от выбора системы координат f. Это подпространство называется *касательным пространством* M в точке x (см. рис. 5.5) и обозначается M_x. В следующих параграфах мы будем пользоваться тем фактом, что на M_x имеется естественное внутреннее произведение T_x, индуцируемое внутренним произведением из $\mathbf{R}^n_x$ и определяемое для всякой пары v, $w \in M_x$ равенством $T_x(v, w) = \langle v, w \rangle_x$.

Предположим, что A — открытое множество, содержащее M, и F — такое дифференцируемое поле на A, что $F(x) \in M_x$ для каждого $x \in M$. Для системы координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ существует единственное (дифференцируемое)

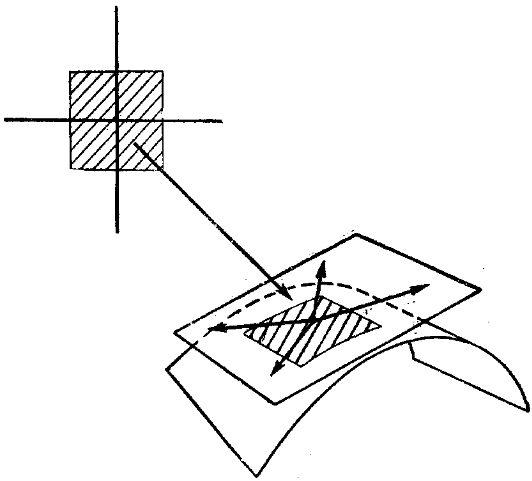


Рис. 5.5.

векторное поле G на W, такое, что $f_*(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $a \in W$. Можно также рассматривать функцию F, которая относит каждому $x \in M$ некоторый вектор $F(x) \in M_x$; такая функция называется ***векторным полем на*** M. По-прежнему существует единственное векторное поле G на W, такое, что $f_*(G(a)) = F(f(a))$ для каждого $a \in W$. Мы *по определению* будем считать F дифференцируемым, если дифференцируемо G. Заметим, что наше определение не зависит от выбора системы координат: если $g\colon V \to \mathbf{R}^n$ таково, что $g_*(H(b)) = F(b)$ для всех $b \in V$, то координатные функции для $H(b)$ должны совпадать с координатными функциями для $G(f^{-1}(g(b)))$, так что дифференцируемость G влечет *дифференцируемость* H.

В точности те же рассмотрения проводятся и для форм. Функция ω, которая каждому $x \in M$ относит $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$, называется *формой p-й степени на M*. Если $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат, то $f^*\omega$ будет формой p-й степени на W. Форма ω называется дифференцируемой, если дифференцируема форма $f^*\omega$. Форма p-й степени ω на M может быть записана в виде

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

где функции $\omega_{i_1, \ldots, i_p}$ определены только на M. Прежнее определение $d\omega$ было бы лишено здесь смысла, поскольку не определены $D_j(\omega_{i_1, \ldots, i_p})$. Тем не менее существует разумный способ определения $d\omega$.

5.3. Теорема. *Существует единственная форма $(p+1)$-й степени $d\omega$ на M, такая, что*

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$$

для всякой системы координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат с $x = f(a)$ и $v_1, \ldots, v_{p+1} \in M_x$. В $\mathbf{R}^k_a$ имеются однозначно определенные векторы $w_1, \ldots, w_{p+1}$, для которых $f_*(w_i) = v_i$. Положим теперь по определению $d\omega(x)(v_1, \ldots, v_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(w_1, \ldots, w_{p+1})$. Можно проверить, что это задание $d\omega(x)$ не зависит от выбора системы координат, так что $d\omega$ определено корректно.

При этом ясно, что $d\omega$ обязано удовлетворять условию этого определения и потому единственно. ∎

Часто бывает необходимо выбрать ориентацию μ_x в каждом касательном пространстве M_x многообразия M. Такие ориентации называются *согласованными* (рис. 5.6), если для каждой системы координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ и каждой пары $a, b \in W$ равенство

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

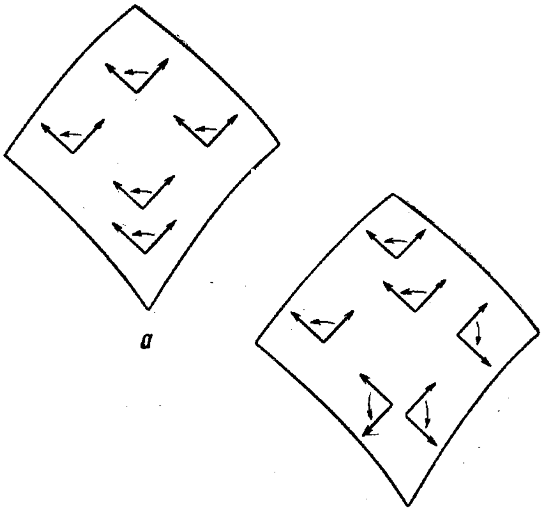
выполнено тогда и только тогда, когда

$$[f_*((e_1)_b), \ldots, f_*((e_k)_b)] = \mu_{f(b)}.$$

Предположим, что выбраны согласованные ориентации μ_x. Если система координат f: $W \to \mathbf{R}^n$ такова, что

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_{f(a)}$$

для некоторого, а потому и для каждого $a \in W$, то говорят, что f *сохраняет ориентацию*. Если f *не* сохраняет ориентацию и T: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ — линейное отображение с $\det T = -1$,



а

б

Рис. 5.6.

а — согласованный выбор ориентаций, *б* — несогласованный выбор ориентаций.

то $f \circ T$ уже сохраняет ориентацию. Поэтому в окрестности любой точки существует система координат, сохраняющая ориентацию. Если f и g сохраняют ориентацию и $x = f(a) = g(b)$, то из равенств

$$[f_*((e_1)_a), \ldots, f_*((e_k)_a)] = \mu_x = [g_*((e_1)_b), \ldots, g_*((e_k)_b)]$$

следует, что

$$[(g^{-1} \circ f)_*((e_1)_a), \ldots, (g^{-1} \circ f)_*((e_k)_a)] = [(e_1)_b, \ldots, (e_k)_b],$$

откуда $\det(g^{-1} \circ f)' > 0$ — важный факт, который следует запомнить.

Многообразие M, допускающее выбор согласованных ориентаций μ_x, называется *ориентируемым*, а всякий такой выбор μ_x — *ориентацией* μ этого многообразия. Многообразие M вместе с его ориентацией μ называется *ориентированным многообразием*. Классическим примером неориентируемого многообразия является лист Мёбиуса. Модель его можно получить, склеив концы бумажной полоски, закрученной на пол-оборота (рис. 5.7).

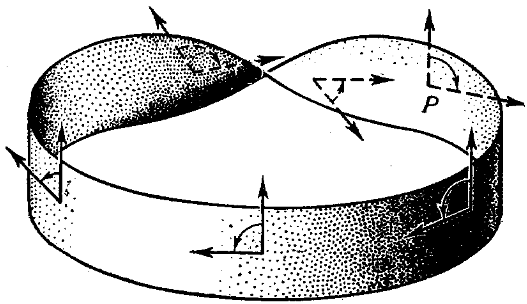


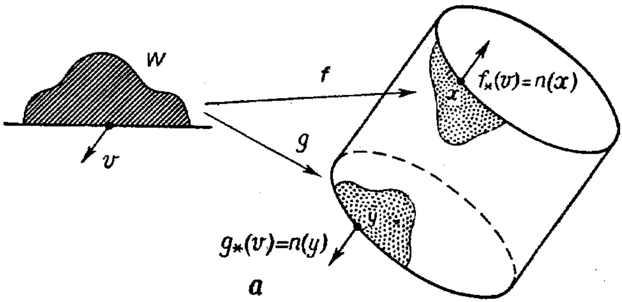
Рис. 5.7. Лист Мёбиуса, пример неориентируемого многообразия.

Базис движется вправо, начиная от P, и, сделав один оборот, возвращается в P уже с противоположной ориентацией.

Наши определения векторных полей, форм и ориентаций можно распространить и на многообразия с краем. Если M есть k-мерное многообразие с краем и $x \in \partial M$, то $(\partial M)_x$ есть $(k-1)$-мерное подпространство k-мерного векторного пространства M_x. Таким образом, существуют в точности два единичных вектора в M_x, перпендикулярных к $(\partial M)_x$. Их можно различить следующим образом (рис. 5.8). Пусть $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ — система координат с $W \subset \mathbf{H}^k$ и $f(0) = x$. Тогда только один из этих единичных векторов равен $f_*(v_0)$ для некоторого v_0 с $v^k < 0$. Этот единичный вектор $n(x)$ называется ортом *внешней нормали*. Нетрудно проверить, что это определение не зависит от системы координат f.

Пусть μ — ориентация на k-мерном многообразии с краем M. Для всякого $x \in \partial M$ выберем $v_1, \ldots, v_{k-1} \in (\partial M)_x$ так, чтобы $[n(x), v_1, \ldots, v_{k-1}] = \mu_x$.

Если также $[n(x), w_1, \ldots, w_{k-1}] = \mu_x$, то $[v_1, \ldots, v_{k-1}]$ и $[w_1, \ldots, w_{k-1}]$ задают одну и ту же ориентацию на $(\partial M)_x$; она обозначается $(\partial\mu)_x$. Легко видеть, что ориен-



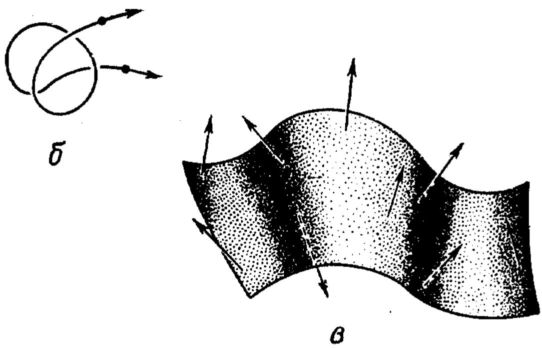


Рис. 5.8. Некоторые орты внешних нормалей многообразий с краем в $\mathbf{R}^3$.

тации $(\partial\mu)_x$ для $x \in \partial M$ согласованы на ∂M. Таким образом, если M ориентируемо, то также ∂M ориентируемо, и ориентация μ на M определяет ориентацию $\partial\mu$ на ∂M, называемую *индуцированной ориентацией*. Если мы применим эти определения к полупространству $\mathbf{H}^k$ с его стандартной ориентацией, то увидим, что индуцированной ориентацией на $\mathbf{R}^{k-1} = \{x \in \mathbf{H}^k: x^k = 0\}$ служит стандартная ориентация, умноженная на $(-1)^k$. Основания для описанного выбора индуцированной ориентации выяснятся в следующем параграфе.

В том случае, когда M — *ориентированное* $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$, можно определить орты внешних нормалей, даже в том случае, когда M не является границей n-мерного многообразия. Пусть $[v_1, \ldots, v_{n-1}] = \mu_x$. Выберем единичный вектор $n(x)$ в $\mathbf{R}^n_x$ так, чтобы он был перпендикулярен M_x, а $[n(x), v_1, \ldots, v_{n-1}]$ было стандартной ориентацией на $\mathbf{R}^n_x$, и по-прежнему назовем $n(x)$ ортом внешней нормали к M (определяемым ориентацией μ). Вектор $n(x)$ в очевидном смысле непрерывно зависит от точки $x \in M$. Обратно, всякое заданное на M непрерывное семейство единичных нормальных векторов $n(x)$ определяет на M ориентацию. Это показывает, что такой непрерывный выбор нормальных векторов на листе Мёбиуса невозможен. В бумажной модели листа Мёбиуса в точках по обе стороны бумажной полоски (которая имеет толщину) можно приложить нормальные векторы, направленные в противоположные стороны. Невозможность непрерывного выбора нормальных векторов отражена в знаменитом свойстве этой бумажной модели: она имеет только одну сторону (начав красить ее с одной стороны, вы в конце концов закрасите ее всю); другими словами, произвольно выбрав нормальный вектор $n(x)$ в некоторой точке и затем перемещая его в другие точки с соблюдением непрерывности, можно вернуться в исходную точку с противоположно направленным $n(x)$.

Задачи

5.9. Показать, что M_x состоит из касательных векторов в t к всевозможным кривым c, лежащим в M и таким, что $c(t) = x$.

5.10. Пусть на M задан такой набор систем координат $\mathcal{C}$, что

1) для каждого $x \in M$ существует $f \in \mathcal{C}$, являющееся системой координат в окрестности точки x;

2) $\det(f^{-1} \circ g) > 0$ для любых $f, g \in \mathcal{C}$.

Показать, что на M существует единственная ориентация, сохраняющаяся при всех $f \in \mathcal{C}$.

5.11. Пусть M есть n-мерное многообразие с краем в $\mathbf{R}^n$. Возьмем в качестве μ_x стандартную ориентацию пространства $M_x = \mathbf{R}^n_x$ (так определенная ориентация μ называется *стандарт-*

ной ориентацией многообразия M). Показать, что для $x \in \partial M$ оба данных выше определения $n(x)$ совпадают.

5.12. а) Пусть F—дифференцируемое векторное поле на многообразии $M \subset \mathbf{R}^n$. Показать, что существуют такие открытое множество $A \supset M$ и дифференцируемое векторное поле $\widetilde{F}$ на A, что $\widetilde{F}(x) = F(x)$ для всех $x \in M$. (Указание: сделать это локально и воспользоваться разбиением единицы.)

б) Показать, что если M замкнуто, то в качестве A можно взять все пространство $\mathbf{R}^n$.

5.13. Пусть $g: A \to \mathbf{R}^p$ то же, что в теореме 5.1.

а) Пусть $x \in M = g^{-1}(0)$ и $h: U \to \mathbf{R}^n$ — тот по существу единственный диффеоморфизм, для которого $g \circ h(x) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$ и $h(0) = x$. Определим $f: \mathbf{R}^{n-p} \to \mathbf{R}^n$ равенством $f(a) = h(0, a)$. Показать, что f_* взаимно однозначно, так что $n-p$ векторов $f_*((e_1)_0), \ldots, f_*((e_{n-p})_0)$ линейно независимы.

б) Показать, что ориентации μ_x могут быть выбраны согласованно, так что M — ориентируемое многообразие.

в) Показать, что если $p = 1$, то координаты орта внешней нормали в x кратны $D_1 g(x), \ldots, D_n g(x)$.

5.14. Пусть $M \to \mathbf{R}^n$ — ориентируемое k-мерное многообразие. Доказать существование такого $g: A \to \mathbf{R}^{n-k}$, что $M = g^{-1}(0)$ и $g'(x)$ имеет ранг $n-k$ для всякого $x \in M$. (Указание: задача 5.4 дает локальное решение; используя ориентацию, выбрать согласованные локальные решения и воспользоваться разбиением единицы).

5.15. Пусть M есть $(n-1)$-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и $M(\varepsilon)$ — совокупность концов всех нормальных векторов длины ε (проведенных в обоих направлениях). Предположим, что ε столь мало, что $M(\varepsilon)$ также есть $(n-1)$-мерное многообразие. Показать, что $M(\varepsilon)$ ориентируемо (даже если M было неориентируемо). Что такое $M(\varepsilon)$ в случае, когда M — лист Мёбиуса?

5.16. Пусть $g: A \to \mathbf{R}^p$ то же, что и в теореме 5.1. Показать, что если $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема и ее максимум (или минимум) на $g^{-1}(0)$ достигается в точке a, то существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R}$, что

$$D_j f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_j g^i(a), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

(Указание: эти равенства можно переписать в виде $df(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, dg^i(a)$; они очевидны, когда $g(x) = (x^{n-p+1}, \ldots, x^n)$.)

Максимум (или минимум) функции f на $g^{-1}(0)$ иногда называют условным экстремумом при *уравнениях связи* $g^i = 0$. Можно пытаться отыскивать a, решая систему уравнений (1).

В частности, если $g\colon A \to \mathbf{R}$, мы должны решить $n+1$ уравнений

$$D_j f(a) = \lambda D_j g(a),$$
$$g(a) = 0$$

относительно $n+1$ неизвестных $a^1, \ldots, a^n, \lambda$, что часто очень просто, если оставить уравнение $g(a)=0$ напоследок. Это *метод Лагранжа*, а полезное, но постороннее λ называется *множителем Лагранжа*. В следующей задаче дается пример изящного теоретического использования множителей Лагранжа.

5.17. а) Пусть $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — самосопряженный оператор с матрицей $A = (a_{ij})$, так что $a_{ij} = a_{ji}$. Показать, что если $f(x) = \langle Tx, x\rangle = \sum a_{ij}x^i x^j$, то $D_k f(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x^j$. Рассматривая максимум функции $\langle Tx, x\rangle$ на сфере S^{n-1}, доказать существование $x \in S^{n-1}$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, таких, что $Tx = \lambda x$.

б) Пусть $V = \{y \in \mathbf{R}^n\colon \langle x, y\rangle = 0\}$. Показать, что $T(V) \subset V$ и что оператор $T\colon V \to V$ самосопряжен.

в) Доказать существование базиса, состоящего из собственных векторов оператора T.

ТЕОРЕМА СТОКСА НА МНОГООБРАЗИЯХ

Пусть на k-мерном многообразии с краем M заданы форма p-й степени ω и сингулярный p-мерный куб c. Интеграл от ω по c определяется точно так же, как и раньше:

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^*\omega.$$

Интегралы по сингулярным p-мерным цепям так же определяются, как и выше. В случае $p=k$ может оказаться, что существуют такие открытое множество $M \supset [0, 1]^k$ и система координат $f\colon W \to \mathbf{R}^n$, что $c(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, 1]^k$. Сингулярные k-мерные кубы в M всегда будут считаться принадлежащими этому типу. Если M ориентировано, то будем говорить, что сингулярный k-мерный куб c в M *сориентирован*, если f сохраняет ориентацию.

5.4. Теорема. *Пусть M — ориентированное k-мерное многообразие, $c_1, c_2\colon [0, 1]^k \to M$ — два сориентированных сингулярных k-мерных куба в M и ω — форма*

k-й степени на M, обращающаяся в 0 вне $c_1([0,1]^k)\cap \cap c_2([0,1]^k)$. Тогда

$$\int_{c_1}\omega=\int_{c_2}\omega.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{c_1}\omega=\int_{[0,1]^k}c_1^*(\omega)=\int_{[0,1]^k}\left(c_2^{-1}\circ c_1\right)^* c_2^*(\omega).$$

(Здесь $c_2^{-1}\circ c_1$ определено только на подмножестве из $[0,1]^k$, и второе равенство существенно опирается на то, что $\omega=0$ вне $c_1([0,1]^k)\cap c_2([0,1]^k)$.) Поэтому достаточно показать, что

$$\int_{[0,1]^k}\left(c_2^{-1}\circ c_1\right)^* c_2^*(\omega)=\int_{[0,1]^k}c_2^*(\omega)=\int_{c_2}\omega.$$

Пусть $c_2^*(\omega)=f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$. Обозначая $c_2^{-1}\circ c_1$ через g, в силу теоремы 4.9 имеем

$$\begin{aligned}\left(c_2^{-1}\circ c_1\right)^* c_2^*(\omega)&=g^*(g\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k)=\\&=(f\circ g)\cdot\det g'\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k=\\&=(f\circ g)\,|\det g'|\cdot dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k,\end{aligned}$$

поскольку $\det g'=\det\left(c_2^{-1}\circ c_1\right)'>0$. Утверждаемый результат вытекает теперь из теоремы 3.13. ▮

Последнее равенство в этом доказательстве помогает понять, почему мы должны были уделять столько внимания ориентациям.

Пусть ω — форма k-й степени на ориентированном k-мерном многообразии M. Если в M найдется такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $\omega=0$ вне $c([0,1]^k)$, то мы по определению положим

$$\int_M\omega=\int_c\omega.$$

Теорема 5.4 показывает, что $\int_M\omega$ не будет зависеть от выбора c.

Пусть теперь ω — произвольная форма k-й степени на M и M обладает таким открытым покрытием $\mathfrak{S}$, что для каждого $U \in \mathfrak{S}$ существует такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $U \subset c([0, 1]^k)$. Пусть Φ — разбиение единицы на M, подчиненное этому покрытию. Положим

$$\int\limits_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int\limits_M \varphi \cdot \omega$$

в предположении, что сумма сходится (она во всяком случае сходится, когда M компактно). Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 3.12, показывают, что так определенный $\int\limits_M \omega$ не зависит от покрытия $\mathfrak{S}$ и разбиения Φ.

Все наши определения можно было бы дать и для k-мерного многообразия с краем M, снабженного ориентацией μ. Наделим ∂M индуцированной ориентацией $\partial\mu$, и пусть c — такой сориентированный сингулярный k-мерный куб в M, что $c_{(k, 0)}$ лежит в ∂M и является единственной гранью, хотя бы одна внутренняя точка которой принадлежит ∂M. Из замечаний, сделанных после определения $\partial\mu$, следует, что $c_{(k, 0)}$ сориентирована, если k четно, и несориентирована, если k нечетно. Таким образом, для всякой формы $(k-1)$-й степени ω на M, равной нулю всюду вне $c([0, 1]^k)$, имеем

$$\int\limits_{c_{(k, 0)}} \omega = (-1)^k \int\limits_{\partial M} \omega.$$

С другой стороны, $c_{(k, 0)}$ входит с коэффициентом $(-1)^k$ и в ∂c. Поэтому

$$\int\limits_{\partial c} \omega = \int\limits_{(-1)^k c_{(k, 0)}} \omega = (-1)^k \int\limits_{c_{(k, 0)}} \omega = \int\limits_{\partial M} \omega.$$

Наш выбор $\partial\mu$ был сделан с тем расчетом, чтобы полностью избавиться от отрицательных знаков в этом равенстве и следующей теореме.

5.5. Теорема Стокса. *Пусть M — компактное ориентированное k-мерное многообразие с краем и ω — форма $(k-1)$-й степени на M. Тогда*

$$\int_M \partial\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где ∂M наделено индуцированной ориентацией.

Доказательство. Предположим сначала, что в $M \setminus \partial M$ имеется такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что $\omega = 0$ вне $c[(0, 1)^k]$. В силу теоремы 4.13 и определения $d\omega$

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Тогда

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0,$$

поскольку $\omega = 0$ на ∂c. С другой стороны, и $\int_{\partial M} \omega = 0$, поскольку $\omega = 0$ на ∂M.

Предположим теперь, что в M имеется такой сориентированный сингулярный k-мерный куб c, что единственной его гранью, лежащей в ∂M, служит $c_{(k,0)}$ и $\omega = 0$ вне $c([0, 1]^k)$. Тогда

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Обратимся, наконец, к общему случаю. M допускает такое открытое покрытие $\mathfrak{G}$ и такое подчиненное ему разбиение единицы Φ, что для каждого $\varphi \in \Phi$ форма $\varphi\omega$ принадлежит одному из двух уже рассмотренных типов. Имеем

$$0 = d(1) = d\Big(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\Big) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi,$$

так что

$$\sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0.$$

Поскольку M компактно, эта сумма конечна, и потому

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M d\varphi\wedge\omega=0.$$

Следовательно,

$$\int_M d\omega=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M \varphi\, d\omega=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M d\varphi\wedge\omega+\varphi\cdot d\omega=$$

$$=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_M d(\varphi\omega)=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_{\partial M}\varphi\omega=\int_{\partial M}\omega. \blacksquare$$

Задачи

5.18. Пусть M есть n-мерное многообразие (или многообразие с краем) в $\mathbf{R}^n$, наделенное стандартной ориентацией. Показать, что интеграл $\int_M f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, определенный в этой главе, совпадает с интегралом $\int_M f$, определенным в гл. 3.

5.19. а) Показать, что для некомпактных M теорема 5.5 неверна. (Указание: если M — многообразие с краем, для которого справедлива теорема 5.5, то $M\setminus\partial M$ — также многообразие с краем (пустым).)

б) Показать, что теорема 5.5 верна и для некомпактного M, если ω равна нулю всюду вне некоторого его компактного подмножества.

5.20. Доказать, что если ω — форма $(k-1)$-й степени на компактном k-мерном многообразии M, то $\int_M d\omega=0$. Дать контрпример с некомпактным M.

5.21. *Абсолютным тензором* k-й степени на V называется функция η: $V^k\to\mathbf{R}$ вида $|\omega|$, где $\omega\in\Lambda^k(V)$. *Абсолютной формой* k-й степени на M называется такая функция η, что $\eta(x)$ есть абсолютный тензор k-й степени на M_x для каждого $x\in M$. Показать, что можно определить интеграл $\int_M \eta$ даже если M неориентируемо.

5.22. Пусть $M_1, M_2\in\mathbf{R}^n$ — компактные n-мерные многообразия с краем, причем $M_2\subset M_1\setminus\partial M_1$, и ω — форма $(n-1)$-й степени на M_1. Доказать, что

$$\int_{\partial M_1}\omega=\int_{\partial M_2}\omega,$$

где ∂M_1 и ∂M_2 наделены ориентациями, индуцированными стандартными ориентациями многообразий M_1 и M_2. (Указание: найти такое многообразие с краем M, что $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ и индуцированная ориентация на ∂M совпадает на ∂M_1 с ориентацией ∂M_1 и противоположна на ∂M_2 ориентации ∂M_2.)

ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА

Пусть M есть k-мерное многообразие (или многообразие с краем) в $\mathbf{R}^n$, наделенное ориентацией μ. Для каждого $x \in M$ введенные раньше ориентация μ_x и внутреннее произведение T_x определяют элемент объема $\omega(x) \in \Lambda^k(M_x)$. Мы получаем поэтому всюду отличную от нуля форму k-й степени ω на M, которая называется *элементом объема* на M (определяемым μ) и обозначается dV, хотя она, вообще говоря, и не является дифференциалом какой-либо формы $(k-1)$-й степени. Под *объемом* M понимают $\int_M dV$ в предположении, что этот интеграл существует, что во всяком случае имеет место, когда M компактно. Для одномерных или двумерных многообразий „объем" обычно называют соответственно *длиной* или *площадью*, а dV обозначают ds („элемент длины") или dA (а также dS) („элемент площади [поверхности]").

Интересующий нас конкретный случай — это элемент объема ориентированной поверхности (двумерного многообразия) M в $\mathbf{R}^3$. Пусть $n(x)$ — орт внешней нормали в точке $x \in M$. Если $\omega \in \Lambda^2(M_x)$ определить формулой

$$\omega(v, w) = \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix},$$

то $\omega(v, w) = 1$, если v и w образуют ортонормальный базис в M_x с $[v, w] = \mu_x$. Таким образом, $dA = \omega$. С другой стороны, $\omega(v, w) = \langle v \times w, n(x) \rangle$ по определению $v \times w$, так что

$$dA(v, w) = \langle v \times w, n(x) \rangle.$$

Так как $v \times w$ для любых $v, w \in M_x$ кратно $n(x)$, то заключаем, что

$$dA(v, w) = |v \times w|$$

при $[v, w] = \mu_x$. Чтобы найти площадь поверхности M, мы должны вычислить $\int\limits_{[0,1]^2} c^*(dA)$ для сориентированных сингулярных двумерных кубов c. Положим

$$E(a) = [D_1c^1(a)]^2 + [D_1c^2(a)]^2 + [D_1c^3(a)]^2,$$
$$F(a) = D_1c^1(a) \cdot D_2c^1(a) + D_1c^2(a) \cdot D_2c^2(a) + D_1c^3(a) \cdot D_2c^3(a),$$
$$G(a) = [D_2c^1(a)]^2 + [D_2c^2(a)]^2 + [D_2c^3(a)]^2.$$

Тогда

$$c^*(dA)((e_1)_a, (e_2)_a) = dA(c_*((e_1)_a), c_*((e_2)_a)) =$$
$$= |(D_1c^1(a), D_1c^2(a), D_1c^3(a)) \times (D_2c^1(a), D_2c^2(a), D_2c^3(a))| =$$
$$= \sqrt{E(a)G(a) - F(a)^2}$$

по задаче 4.9. Таким образом,

$$\int\limits_{[0,1]^2} c^*(dA) = \int\limits_{[0,1]^2} \sqrt{EG - F^2}.$$

Очевидно, что вычисление площади поверхности — отважное предприятие. К счастью, редко требуется знать площадь поверхности. Кроме того, существует простое выражение для dA, достаточное для теоретических рассмотрений.

5.6. Теорема. *Пусть M — компактное ориентированное двумерное многообразие (или многообразие с краем) в $\mathbf{R}^3$ и n — орт внешней нормали. Тогда*

1) $dA = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy$.

Кроме того,

2) $n^1 dA = dy \wedge dz$,
3) $n^2 dA = dz \wedge dx$,
4) $n^3 dA = dx \wedge dy$.

Доказательство. Равенство (1) эквивалентно равенству

$$dA(v, w) = \det \begin{pmatrix} v \\ w \\ n(x) \end{pmatrix},$$

что явствует из разложения определителя по минорам нижней строки. Для доказательства остальных равенств рассмотрим

$z \in M_x$. Так как $v \times w = \alpha n(x)$ с некоторым $\alpha \in \mathbf{R}$, то

$$\langle z, n(x)\rangle \cdot \langle v \times w, n(x)\rangle = \langle z, n(x)\rangle \alpha = \\ = \langle z, \alpha n(x)\rangle = \langle z, v \times w\rangle.$$

Взяв в качестве z векторы e_1, e_2 и e_3, получим (2), (3) и (4). ∎

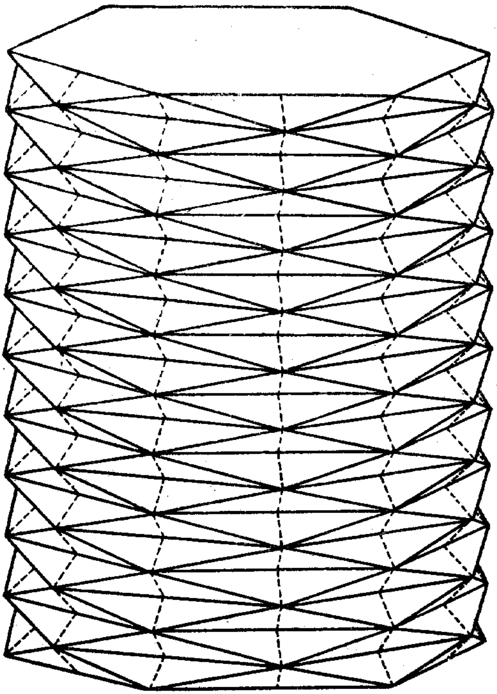


Рис. 5.9. Поверхность образована треугольниками, вписанными в часть цилиндра.

Основания треугольников лежат на параллельных плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра. Расстояния между соседними плоскостями равны. Будем увеличивать число треугольников, уменьшая это расстояние, и потребуем, чтобы нижняя грань длин оснований всех треугольников была при этом строго больше нуля. В таком случае площадь вписанной поверхности можно сделать сколь угодно большой.

Предостережение: для $\omega \in \Lambda^2(\mathbf{R}^3_a)$, определенного равенством

$$\omega = n^1(a)\, dy(a) \wedge dz(a) + n^2(a)\, dz(a) \wedge dx(a) + \\ + n^3(a)\, dx(a) \wedge dy(a),$$

неверно, например, что

$$n^1(a)\,\omega = dy(a) \wedge dz(a).$$

Обе стороны дают одинаковый результат, только будучи примененными к $v, w \in M_a$.

Несколько замечаний относительно оснований для данных нами определений длины кривой и площади поверхности. Если $c:[0,1] \to \mathbf{R}^n$ дифференцируемо и $c([0,1)]$ — одномерное многообразие с краем, то можно показать (но с помощью довольно канительного доказательства), что его длина действительно является верхней гранью длин вписанных ломаных. При $c:[0,1]^2 \to \mathbf{R}^n$ естественно ожидать, что площадь $c([0,1]^2)$ будет верхней гранью площадей поверхностей, составленных из треугольников, вершины которых лежат в $c([0,1]^2)$. Довольно поразительно, что такая верхняя грань обычно не существует — можно вписывать многогранные поверхности, сколь угодно близкие к $c([0,1]^2)$, но имеющие сколь угодно большую площадь. На рис. 5.9 это продемонстрировано на примере цилиндра. Было предложено много определений площади поверхности, которые расходятся друг с другом, но все согласуются с нашим определением для случая дифференцируемых поверхностей. Рассмотрение этих трудных вопросов читатель может найти в работах [17] или [10].

Задачи

5.23. Показать, что если M — ориентированное одномерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ и c: $[0, 1] \to M$ сориентировано, то

$$\int\limits_{[0,1]} c^*(ds) = \int\limits_{[0,1]} \sqrt{[(c^1)']^2 + \ldots + [(c^n)']^2}.$$

5.24. Показать, что если M есть n-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$ со стандартной ориентацией, то $dV = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, так что его объем, определенный в этом параграфе, совпадает с объемом, определенным в гл. 3. (Заметим, что здесь проявляется влияние числового коэффициента в определении $\omega \wedge \eta$.)

5.25. Обобщить теорему 5.6 на случай ориентированного $(n-1)$-мерного многообразия в $\mathbf{R}^n$.

5.26. а) Пусть f: $[a, b] \to \mathbf{R}$ — неотрицательная функция и график f в плоскости xy вращается вокруг оси x в $\mathbf{R}^3$, образуя поверхность M. Показать, что ее площадь равна

$$\int_a^b 2\pi f\sqrt{1+(f')^2}.$$

б) Вычислить площадь сферы S^2.

5.27. Пусть $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейное отображение, сохраняющее норму, и M есть k-мерное многообразие в $\mathbf{R}^n$. Показать, что M и $T(M)$ имеют одинаковый объем.

5.28. а) Показать, что на k-мерном многообразии M можно определить абсолютный тензор k-й степени $|dV|$, даже если M неориентируемо, так, что M будет иметь объем $\int\limits_M |dV|$.

б) Показать, что для $c\colon [0, 2\pi] \times (-1, 1) \to \mathbf{R}^3$, определенного равенством

$$c(u, v) = \left(2\cos u + v\sin\frac{u}{2}\cos u,\ 2\sin u + v\sin\frac{u}{2}\sin u,\ v\cos\frac{u}{2}\right),$$

$c([0, 2\pi] \times (-1, 1))$ есть лист Мёбиуса, и найти его площадь.

5.29. Показать, что если на k-мерном многообразии M существует всюду отличная от нуля форма k-й степени, то M ориентируемо.

5.30. а) Пусть $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ дифференцируема и $c\colon [0, 1] \to \mathbf{R}^2$ определено равенством $c(x) = (x, f(x))$. Показать, что $c([0, 1])$ имеет длину $\int\limits_0^1 \sqrt{1+(f')^2}$.

б) Показать, что эта длина является верхней гранью длин вписанных ломаных. (Указание: Если $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$, то

$$|c(t_i) - c(t_{i-1})| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2} =$$
$$= \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + f'(s_i)^2 (t_i - t_{i-1})^2}$$

с некоторым $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$.)

5.31. Пусть ω — форма второй степени, определенная на $\mathbf{R}^3 \setminus 0$ равенством

$$\omega = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

а) Показать, что ω замкнута.

б) Показать, что

$$\omega(p)(v_p, w_p) = \frac{\langle v \times w, p\rangle}{|p|^3}.$$

Пусть $r > 0$ и $S^2(r) = \{x \in \mathbf{R}^3: |x| = r\}$. Показать, что сужение ω на касательную плоскость к $S^2(r)$ есть элемент объема, умноженный на $1/r^2$, и что $\int\limits_{S^2(r)} \omega = 4\pi$. Вывести отсюда, что форма ω не точна. Тем не менее обозначим ω через $d\Theta$, поскольку, как мы увидим, $d\Theta$ является аналогом формы первой степени $d\theta$ на $\mathbf{R}^2 \setminus 0$.

в) Показать, что если v_p — такой касательный вектор, что $v = \lambda p$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{R}$, то $d\Theta(p)(v_p, w_p) = 0$ для всех w_p.

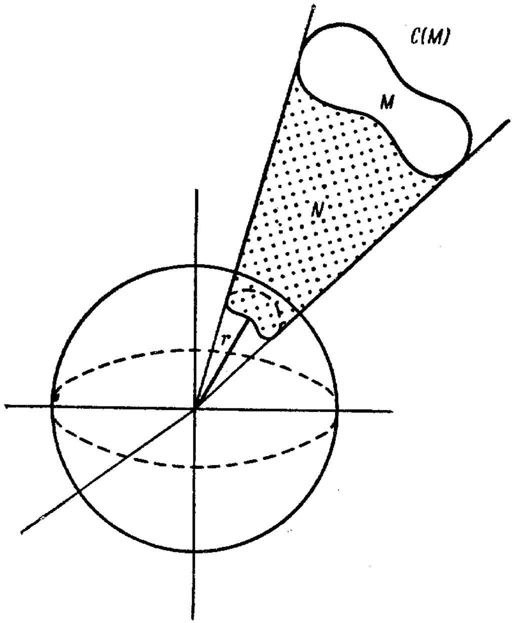


Рис. 5.10.

Показать, что если двумерное многообразие M в $\mathbf{R}^3$ является частью обобщенного конуса, т. е. объединением отрезков лучей, исходящих из нуля, то $\int\limits_M d\Theta = 0$.

г) Пусть $M \subset \mathbf{R}^3 \setminus 0$ — такое компактное двумерное многообразие с краем, что любой луч, исходящий из 0, пересекает M не более одного раза (рис. 5.10). Объединение всех исходящих из 0 лучей, пересекающих M, образует телесный угол $C(M)$. За *телесный угол*, стягиваемый многообразием M, принимается площадь $C(M)\cap S^2$ или, что то же, площадь $C(M)\cap S^2(r)$ при любом $r>0$, деленная на r^2. Доказать, что телесный угол, стягиваемый многообразием M, равен $\left|\int\limits_M d\Theta\right|$. (Указание: выбрать r столь малым, чтобы существовало трехмерное многообразие с краем N (как на рис. 5.10), имеющее в качестве ∂N объединение M, $C(M)\cap S^2(r)$ и части обобщенного конуса. (В действительности N будет многообразием с углами; см. замечания в конце следующего параграфа.).)

5.32. Пусть $f, g\colon [0, 1]\to \mathbf{R}^3$ — непересекающиеся замкнутые кривые. Определим *коэффициент зацепления* $l(f, g)$ кривых f и g формулой (ср. задачу 4.34)

$$l(f, g)=\frac{-1}{4\pi}\int\limits_{c_{f,g}} d\Theta.$$

а) Показать, что если (F, G) — гомотопия непересекающихся замкнутых кривых, то $l(F_0, G_0)=l(F_1, G_1)$.

б). Показать, что если $r(u, v)=|f(u)-g(v)|$, то

$$l(f, g)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{1}{|r(u, v)|^3}A(u, v)\,du\,dv,$$

где

$$A(u, v)=\det\begin{pmatrix}(f^1)'(u) & (f^2)'(u) & (f^3)'(u)\\ (g^1)'(v) & (g^2)'(v) & (g^3)'(v)\\ f^1(u)-g^1(v) & f^2(u)-g^2(v) & f^3(u)-g^3(v)\end{pmatrix}.$$

в) Показать, что если обе кривые f и g лежат в плоскости x, y, то $l(f, g)=0$. Кривые на рис. 4.5, *б* задаются формулами $f(u)=(\cos u, \sin u, 0)$ и $g(v)=(1+\cos v, 0, \sin v)$. Читатель может легко убедиться в том, что здесь вычисление $l(f, g)$ с помощью указанного интеграла — занятие безнадежное. Следующая задача показывает, как находить $l(f, g)$ без прямого вычисления.

5.33. а) Для точки $(a, b, c)\in\mathbf{R}^3$ положим

$$d\Theta_{(a, b, c)}=\frac{(x-a)\,dy\wedge dz+(y-b)\,dz\wedge dx+(z-c)\,dx\wedge dy}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}.$$

Далее, для компактного двумерного многообразия с краем M в $\mathbf{R}^3$ и точки $(a, b, c)\notin M$ положим

$$\Omega(a, b, c)=\int\limits_M d\Theta_{(a, b, c)}.$$

Пусть (a, b, c) — точка, лежащая по ту же сторону от M, что и внешняя нормаль, и (a', b', c') — точка, лежащая по противоположную сторону. Показать, что, выбирая (a, b, c) и (a', b', c') достаточно близкими, можно сделать $\Omega(a, b, c) - \Omega(a', b', c')$ сколь угодно близким к -4π. (Указание: сначала показать, что если $M = \partial N$, то $\Omega(a, b, c) = -4\pi$ при $(a, b, c) \in N \setminus M$ и $\Omega(a, b, c) = 0$ при $(a, b, c) \notin N$.)

б) Пусть $f([0, 1]) = \partial M$ для некоторого компактного ориентированного двумерного многообразия с краем M. (Если f не имеет самопересечений, такое M всегда существует, даже если f заузлено, см. [13, стр. 138].) Предположим, что g — кривая, обладающая тем свойством, что касательный вектор v к g в точках x, где g пересекает M, не лежит в M_x. Пусть n^+ — число тех пересечений, для которых вектор v направлен в сторону внешней нормали, n^- — число остальных пересечений и $n = n^+ - n^-$. Показать, что

$$n = \frac{-1}{4\pi} \int_g d\Omega.$$

в) Доказать, что

$$D_1\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(y-b)\,dz - (z-c)\,dy}{r^3},$$

$$D_2\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(z-c)\,dx - (x-a)\,dz}{r^3},$$

$$D_3\Omega(a, b, c) = \int_f \frac{(x-a)\,dy - (y-b)\,dx}{r^3},$$

где $r(x, y, z) = |(x, y, z)|$.

г) Показать, что число n из б) равно интегралу задачи 5.32, б, и, используя этот результат, показать, что $l(f, g) = 1$ для кривых f и g, изображенных на рис. 4.6, *б*, и $l(f, g) = 0$ для кривых f и g на рис. 4.6, *в*. (Эти результаты были известны Гауссу [3]. Намеченные здесь доказательства взяты из [7]; см. также [8].)

КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Теперь подготовлен весь аппарат, необходимый для формулирования и доказательства классических теорем „стоксовского типа". Мы разрешим себе несколько классических обозначений, имеющих очевидный смысл.

5.7. Теорема Грина. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^2$ — компактное двумерное многообразие с краем. Предположим, что*

α, $\beta: M \to \mathbf{R}$ дифференцируемы. Тогда

$$\int\limits_{\partial M} \alpha dx + \beta dy = \int\limits_{M} (D_1\beta - D_2\alpha)\, dx \wedge dy =$$
$$= \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

где на M задана стандартная ориентация, а на ∂M — индуцированная ориентация, известная также как „обход против часовой стрелки“.

Доказательство. Это весьма специальный случай теоремы 5.5, поскольку

$$d(\alpha dx + \beta dy) = (D_1\beta - D_2\alpha)\, dx \wedge dy\,. \blacksquare$$

5.8. Теорема Гаусса—Остроградского. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^3$ — компактное трехмерное многообразие с краем, n — орт внешней нормали на ∂M и F — дифференцируемое векторное поле на M. Тогда*

$$\int\limits_{M} \operatorname{div} F dV = \int\limits_{\partial M} \langle F, n\rangle\, dA.$$

Это равенство записывается также в виде

$$\iiint\limits_{M} \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) dV = \iint\limits_{\partial M} (n^1\alpha + n^2\beta + n^3\gamma)\, dS,$$

где α, β, $\gamma: M \to \mathbf{R}$ — тройка дифференцируемых функций.

Доказательство. Рассмотрим на M форму $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$. Имеем $d\omega = \operatorname{div} F dV$. С другой стороны, применяя теорему 5.6 к ∂M, получаем, что на ∂M

$$n^1\, dA = dy \wedge dz,$$
$$n^2\, dA = dz \wedge dx,$$
$$n^3\, dA = dx \wedge dy,$$

Поэтому на ∂M

$$\langle F, n\rangle\, dA = F^1 n^1\, dA + F^2 n^2\, dA + F^3 n^3\, dA =$$
$$= F^1\, dy \wedge dz + F^2\, dz \wedge dx + F^3\, dx \wedge dy = \omega.$$

Таким образом, в силу теоремы 5.5

$$\int_M \operatorname{div} F\, dV = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F, n\rangle\, dA. \blacksquare$$

5.9. Теорема Стокса. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^3$ — компактное ориентированное двумерное многообразие с краем, n — орт внешней нормали на M, определяемый ориентацией M, и ∂M наделено индуцированной ориентацией. Пусть, далее, T — векторное поле на ∂M, для которого $ds(T) = 1$, и F — дифференцируемое векторное поле в открытом множестве, содержащем M. Тогда*

$$\int_M \langle (\nabla \times F), n\rangle\, dA = \int_{\partial M} \langle F, T\rangle\, ds.$$

Это равенство часто записывают в виде

$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz =$$

$$= \int_M\int [n^1 \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) + n^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) +$$

$$+ n^3\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)]\, ds.$$

Доказательство. Рассмотрим на M форму $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$. Так как $\nabla \times F$ имеет компоненты $D_2F^3 - D_3F^2$, $D_3F^1 - D_1F^3$, $D_1F^2 - D_2F^1$, то, как и при доказательстве теоремы 5.8, заключаем, что на M

$$\langle(\nabla \times F), n\rangle\, dA =$$
$$= (D_2F^3 - D_3F^2)\, dy \wedge dz + (D_3F^1 - D_1F^3)\, dz \wedge dx +$$
$$+ (D_1F^2 - D_2F^1)\, dx \wedge dy = d\omega.$$

С другой стороны, так как $ds(T) = 1$, то на ∂M

$$T^1\, ds = dx,$$

$$T^2\, ds = dy,$$

$$T^3\, ds = dz.$$

(Эти равенства можно проверить применением обеих частей к T_x для $x \in \partial M$, поскольку T_x является базисом для $(\partial M)_x$.) Поэтому на ∂M имеем

$$\langle F, T\rangle\, ds = F^1 T^1\, ds + F^2 T^2\, ds + F^3 T^3\, ds = \\ = F^1\, dx + F^2\, dy + F^3\, dz = \omega,$$

Таким образом, в силу теоремы 5.5

$$\int_M \langle(\nabla \times F),\ n\rangle\, dA = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \langle F, T\rangle ds. \ \blacksquare$$

Теоремы 5.8 и 5.9 служат основанием для обозначений $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{curl} F$[1]). Если $F(x)$ — вектор скорости жидкости в точке x (в некоторый момент времени), то $\int_M \langle F, n\rangle\, dA$ есть количество жидкости, „расходящейся“ из M. Следовательно, условие $\operatorname{div} F = 0$ выражает тот факт, что жидкость несжимаема. Если M — диск, то $\int_{\partial M} \langle F,\ T\rangle\, ds$ есть мера количества жидкости, циркулирующей вдоль границы этого диска. Если она равна 0 для всех дисков, то $\nabla \times F = 0$ и течение жидкости называется *безвихревым*.

Эти интерпретации $\operatorname{div} F$ и $\operatorname{curl} F$ принадлежат Максвеллу [8]. В действительности он работал с величиной $-\operatorname{div} F$, которую соответственно называл *конвергенцией*.

Для $\nabla \times F$ Максвелл „с большой неуверенностью“ предложил термин „rotation“ (вращение) поля F; этим неудачным термином подсказано сокращение $\operatorname{rot} F$, иногда еще встречающееся[2]).

Классические теоремы этого параграфа обычно устанавливаются при несколько более широких условиях, чем было сделано здесь. Например, теорема Грина верна для квадрата, а теорема Гаусса — Остроградского — для куба. Эти два специальных факта можно доказать, аппроксимируя квадрат или куб многообразиями с краем. Полное обобщение

[1]) Напомним, что div — сокращение от divergence (расходимость), а curl означает вихрь (англ.). — *Прим. перев.*

[2]) В отечественной математической литературе обозначение rot используется не менее часто, чем curl. — *Прим. перев.*

теорем этого параграфа требует понятия многообразий с углами; это подмножества в $\mathbf{R}^n$, локально диффеоморфные частям $\mathbf{R}^k$, ограниченным кусками $(k-1)$-мерных плоскостей. Строгое определение многообразий с углами и исследование того, как можно обобщить на них результаты всей главы, будут достойными упражнениями для читателя, имеющего к этому вкус.

Задачи

5.34. Обобщить теорему Гаусса — Остроградского на случай n-мерного многообразия с краем в $\mathbf{R}^n$.

5.35. Применяя обобщенную теорему Гаусса — Остроградского к множеству $M = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| \leqslant a\}$ и $F(x) = x_x$, выразить $(n-1)$-мерный объем сферы $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| = 1\}$ через n-мерный объем шара $B_n = \{x \in \mathbf{R}^n\colon |x| \leqslant 1\}$ $\Bigg($последний объем равен $\pi^{n/2} \Big/ \left(\frac{n}{2}\right)!$, если n четно, и $\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n}$, если n нечетно$\Bigg)$.

5.36. Пусть F — векторное поле на $\mathbf{R}^3$, определенное равенством $F(x) = (0, 0, cx^3)_x$, и M — компактное трехмерное многообразие с краем, содержащееся в полупространстве $M \subset \{x\colon x^3 \leqslant 0\}$. Поле F можно представить себе как давление жидкости плотности c, заполняющей область $\{x\colon x^3 \leqslant 0\}$. Поскольку жидкость оказывает равное давление во всех направлениях, мы будем под *выталкивающей силой*, действующей на M, понимать $-\int\limits_{\partial M} \langle F, n\rangle\, dA$. Доказать *закон Архимеда*: действующая на M выталкивающая сила равна весу жидкости, вытесненной M.