ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Стиль изложения дифференциального и интегрального исчислений для функций нескольких переменных, принятый в большинстве существующих руководств, довольно архаичен. Достаточно сказать, что в этих руководствах отсутствует общее понятие дифференцируемого отображения и его производной (для случая конечномерных евклидовых пространств). Многое излагается недостаточно строго. Особенно это относится к теоремам Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского. Их доказательства и сами формулировки существенно основываются на интуитивных представлениях о „поверхности, ограничивающей тело“ или „линии, ограничивающей поверхность“. Отсутствие же соответствующих точных общих понятий, а также необходимого аппарата дифференциальных форм, не позволяет установить, что три упомянутые теоремы — просто частные случаи „абстрактной теоремы Стокса“ об интегрировании $(k-1)$-формы по границе k-цепи.

До недавнего времени все это можно было найти лишь в специальных работах или монографиях. Но в последние годы стали появляться учебные руководства, адресованные студентам-математикам старших курсов и имеющие своей задачей изложение различных разделов общего курса математического анализа на более современном научном уровне (см., например, недавно переведенную у нас книгу Рудина [21]). Одним из таких руководств является и книга М. Спивака, русский перевод которой предлагается читателю.

Название книги может создать впечатление, что предмет ее довольно специальный. На самом деле „многообразия“, рассматриваемые в первых главах, — это просто открытые подмножества n-мерного евклидова пространства.

Во второй главе изучаются свойства их дифференцируемых отображений в евклидовы пространства, включая теоремы об обратимых отображениях и неявных функциях. В третьей главе интеграл (Римана), определяемый вначале на n-мерных параллелепипедах, распространяется с помощью „разбиений единицы" на функции, заданные на произвольных открытых множествах. Устанавливаются важнейшие его свойства, включая теорему о замене переменной (к сожалению, автор впоследствии упускает случай отметить тесную связь ее с интегрированием внешних дифференциальных форм). Введение множеств лебеговой меры нуль позволяет не только придать изложению теории интеграла Римана завершенную форму, но и доказать впоследствии теорему Сарда о том, что образ множества точек вырожденности дифференцируемого отображения имеет меру нуль.

Анализу на многообразиях в собственном смысле посвящены последние две главы. В четвертой главе, после необходимых сведений из полилинейной алгебры, вводятся дифференциальные формы и их дифференцирование, затем цепи „сингулярных кубов" (многомерных аналогов дуг Жордана) и их границы; кульминационным пунктом главы (и всей книги) является упомянутая „абстрактная теорема Стокса". Наконец, в пятой главе определяются многообразия и многообразия с краем, вложенные в n-мерное евклидово пространство, для них доказывается общая теорема Стокса и в завершение из нее выводятся классические теоремы Грина, Стокса и Гаусса — Остроградского.

Некоторых, возможно, затруднит непривычная система обозначений, безусловно более точная, чем общепринятая, но иногда и более громоздкая. Рассуждения и особенно вычисления проведены местами излишне сжато. Кроме того, некоторые доказательства опираются на результаты, приведенные лишь в задачах. Таким образом, усвоение материала книги потребует от читателя довольно активной работы, но результаты окупят ее.

Д. А. Райков