ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой небольшой книге нас интересуют главным образом те разделы „высшего анализа“, тонкость понятий и методов которых делает трудным строгое изложение на элементарном уровне. Подход, избранный здесь, состоит в применении элементарных версий методов современной утонченной математики. Формально предполагаются только знание семестрового курса линейной алгебры, шапочное знакомство с теоретико-множественными обозначениями и владение сносным начальным курсом анализа (в котором по крайней мере упоминается о верхней и нижней гранях числового множества). Сверх этого, пожалуй, наиболее существенным является (иногда неявное) использование абстрактной математики.

Первая половина книги охватывает ту простую часть повышенного курса анализа, которая обобщает элементарный анализ на функции многих переменных. Глава 1 содержит предварительные сведения, а в гл. 2 и 3 рассматриваются соответственно дифференцирование и интегрирование.

Остальная часть книги посвящена изучению кривых, поверхностей и их многомерных аналогов. Здесь современный и классический методы изложения совершенно различны, хотя и имеют много точек соприкосновения, что особенно отчетливо показано в последнем параграфе. Вполне классическим результатом является теорема, практически завершающая книгу. Эта теорема (теорема Стокса) имела любопытную историю и претерпела разительные метаморфозы.

Впервые формулировка теоремы появилась в виде приписки к письму сэра Уильяма Томсона (лорда Кельвина) к Стоксу, датированному 2 июля 1850 г. Опубликована она была в качестве восьмого вопроса к экзаменам на смитовскую премию 1854 г. Этот конкурсный экзамен, которому ежегодно подвергались лучшие студенты-математики Кембриджского университета, с 1849 по 1882 г. проводился проф. Стоксом. Ко времени его смерти результат был повсеместно известен как теорема Стокса. Современниками Стокса были даны по крайней мере три доказательства: одно опубликовал Томсон, другое было изложено в „Трактате о натуральной философии" Томсона и Тейта и третье предложил Максвелл в „Электричестве и магнетизме" [8]. С тех пор именем Стокса были названы значительно более общие результаты, сыгравшие столь заметную роль в развитии некоторых разделов математики, что теорема Стокса вполне может дать материал для размышлений о ценности обобщения.

В этой книге имеются три формы теоремы Стокса. Вариант, известный Стоксу, появляется в последнем параграфе вместе со своими неразлучными спутниками — теоремами Грина и Гаусса — Остроградского. Эти три классические теоремы весьма просто выводятся из современной теоремы Стокса, рассматриваемой перед этим в гл. 5. То, что классические теоремы утверждают для кривых и поверхностей, эта теорема устанавливает для их многомерных аналогов (многообразий), подробно изучаемых в первой части гл. 5. Изучение многообразий, которое могло бы быть оправдано уже одной их важностью в современной математике, в действительности требует не больше усилий, чем нужно затратить на аккуратное изучение только кривых и поверхностей.

Читатель, вероятно, подумает, что современная теорема Стокса по крайней мере столь же трудна, как и получаемые из нее классические теоремы. Однако это не так: она является очень простым следствием еще одного варианта теоремы Стокса; этот весьма абстрактный вариант является конечным и основным результатом гл. 4. Естественно предположить, что трудности, которых мы избежали, таятся именно здесь. Однако доказательство этой теоремы с точки зрения математика есть совершенная тривиальность — прямое вычисление. С другой стороны, даже формулировка этой тривиальной теоремы не может быть понята без вереницы трудных определений из гл. 4. Имеются веские причины, в силу которых теоремы должны быть легкими, а определения трудными. Как показывает эволюция теоремы Стокса, за несколькими трудными результатами может скрываться один простой принцип; доказательство многих теорем состоит просто в его обнажении. С другой стороны, определения служат двоякой цели: они являются и строгой заменой расплывчатых понятий, и аппаратом для изящных доказательств. В первых двух параграфах гл. 4 даны точные определения и доказаны правила обращения с тем, что в классической математике называют дифференциальными выражениями типа $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ или $P\,dxdy+Q\,dydz+R\,dzdx$. Цепи, определяемые в третьем параграфе, и разбиение единицы, ранее введенное в гл. 3, освобождают наши доказательства от необходимости раскраивания многообразий на мелкие части; они сводят вопросы, относящиеся к многообразиям, где все представляется трудным, к задачам в евклидовом пространстве, где все просто.

Концентрация глубоких идей в определениях несомненно экономна, но она создает некоторые трудности для изучающего. Надеюсь, что читателя поощрит к основательному изучению гл. 4 уверенность в том, что результаты оправдают его усилия. Классические теоремы последнего параграфа являются лишь немногими и ни в коем случае не самыми главными приложениями гл. 4; многие другие приведены в качестве задач, а указания на дальнейшее развитие можно найти в списке литературы.

Несколько слов о задачах и списке литературы. Задачи помещены после каждого параграфа и (подобно теоремам) имеют сквозную нумерацию внутри каждой из глав. Задачи, результаты которых используются в основном тексте, помечены звездочкой, но желательно, чтобы эта предосторожность оказалась ненужной — задачи составляют важнейшую часть книги, и читателю следовало бы по крайней мере попытаться решить их все. Список литературы нужно было делать либо очень неполным, либо громоздким, поскольку добрую половину основных разделов математики можно с полным правом рекомендовать в качестве естественного продолжения материала книги. Я попытался сделать его неполным, но заинтересовывающим.

Во время написания этой книги было высказано немало критических замечаний и предложений. Я особенно благодарен Ричарду Пелейсу, Хью Росси, Роберту Сили и Чарлзу Стенарду за их многочисленные полезные замечания.

Майкл Спивак

Уолхэм, Массачусетс
Август 1965