5

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЯВЛЕНИЙ ПЕРЕНОСА

До сих пор мы изучали поведение полупроводников в условиях равновесия: в третьей главе был рассмотрен энергетический спектр электронов, в четвертой главе — их статистика, т. е. расселение по энергетическим уровням, во второй — соответствующие вопросы по отношению к фононам.

Все последующие главы связаны с поведением электронов в неравновесных условиях. Важную часть этого круга вопросов составляют так называемые явления переноса, т. е. ряд явлений, обусловленных электрическими и тепловыми потоками, возникающими в среде при наличии электрических, тепловых и магнитных полей. Сюда относятся электро- и теплопроводность, термоэлектрические, гальвано- и термомагнитные явления. При этом предполагается, что концентрация носителей остается равновесной или почти равновесной *) (хотя она и может меняться от точки к точке при наличии градиента температуры) таким образом, что ее изменения не откладывают заметный отпечаток на картину явлений. Поэтому, рассматривая явления переноса, мы исключаем контактные явления, в которых нарушение концентрационного равновесия играет существенную роль. Обычно явления переноса (или по крайней мере их теория) изучаются в стационарных условиях. Полученные результаты потом без труда обобщаются на случай переменных (но не слишком быстро меняющихся) полей.

---

*) Исключением являются явления в сильных электрических полях (см. ниже).

Изучение явлений переноса (или, как их также называют, кинетических эффектов) мы начнем с самого упрощенного, качественного подхода, а затем введем некоторые уточнения.

5.1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ПОДВИЖНОСТИ

Как уже упоминалось в предыдущей главе, в состоянии равновесия все свободные электроны участвуют в беспорядочном тепловом движении. При этом, так как функция распределения симметрична, то количество электронов, движущихся в противоположных направлениях, всегда одинаково, поэтому макроскопические электрические токи отсутствуют. Более того, это равновесие детально; это значит, что не только общее число электронов, движущихся «туда и обратно», одинаково, но это равенство соблюдается для любой данной энергии и скорости, поэтому отсутствуют не только электрические, но и тепловые потоки.

Таким образом, в условиях равновесия $\overline{v_x} = \overline{v_y} = \overline{v_z} = 0$, $j_x = j_y = j_z = 0$, $q_x = q_y = q_z = 0$, где j — плотность электрического тока и q — плотность потока энергии.

Представим себе теперь, что к рассматриваемому нами полупроводниковому образцу приложено электрическое поле E_x. Тогда каждый свободный электрон под влиянием силы $F_x = eE_x$, действующей на него, получает ускорение $a_x = eE_x/m$ и приращение скорости

$$\Delta v_x = \frac{eE_x}{m} t. \qquad (5.1)$$

Если бы при этом никакой процесс не препятствовал увеличению скорости электрона, то она возрастала бы беспредельно. Но в действительности электроны время от времени испытывают столкновения (друг с другом, с тепловыми колебаниями решетки и дефектами), при которых теряют приобретенную в поле энергию и направленную скорость. Поэтому мы предположим, как это уже делали раньше, что можно ввести некоторое среднее время релаксации $\overline{\tau}$ с учетом всех процессов столкновений и считать, что в течение этого времени электрон беспрепятственно ускоряется, а в момент столкновения полностью теряет направленную составляющую скорости, после чего весь процесс повторяется сначала.

Если число таких столкновений (или вероятность столкновения) за одну секунду w, то $\bar{\tau} = 1/w$.

Предположим также, что направленная добавка к скорости $\overline{\Delta v} = \bar{\tau} a_x$, приобретаемая за время пробега электрона *), много меньше v_{0x}. Средняя скорость движения электрона в направлении поля будет равна

$$\bar{v}_x = \frac{\bar{v}_{0x} + \bar{v}_{\tau x}}{2} = \frac{\overline{\Delta v}}{2} = \frac{e\bar{\tau}E_x}{2m} \tag{5.2}$$

(так как $\bar{v}_{0x} = 0$).

При более строгом расчете (с учетом распределения электронов по временам свободного пробега)

$$\bar{v}_x = \frac{e\bar{\tau}}{m} E_x = uE_x, \tag{5.3}$$

где

$$u = \frac{e}{m}\bar{\tau} = \frac{e}{m}\frac{\bar{l}}{v} \tag{5.3а}$$

— подвижность, т. е. дрейфовая скорость электронов, приобретаемая ими в поле, равном единице.

Если число свободных электронов в одном кубическом сантиметре n, все они движутся со скоростью $\bar{v}_x$ и каждый переносит заряд e, то плотность электрического тока

$$j_x = en\bar{v}_x = \frac{e^2 n\bar{\tau}}{m} E_x. \tag{5.3б}$$

Таким образом, электропроводность

$$\sigma = \frac{e^2 \overline{n\tau}}{m} = enu. \tag{5.4}$$

В случае двух знаков носителей

$$\sigma = e(nu_n + pu_p). \tag{5.5}$$

В случае нескольких (k) сортов носителей (например, тяжелых и легких дырок и электронов)

$$\sigma = e^2 \sum_k \frac{n_k\bar{\tau}_k}{m_k}, \tag{5.6}$$

где суммирование проводится по всем k зонам.

*) При этом ограничении мы можем считать, что $\bar{\tau}$ не зависит от поля E_x.

Мы уже упоминали в гл. 3, что если электроны, или, в более общем виде, носители k-го сорта испытывают столкновения различного рода, например столкновения с тепловыми колебаниями, с ионами примеси и нейтральными дефектами, то для каждого типа дефектов можно ввести свое время свободного пробега — соответственно $\tau_т$, $\tau_и$, $\tau_н$ и т. д.; обозначим в общем виде время свободного пробега носителей k-го сорта, соответствующее определенному (i-му) сорту соударений, через τ_{ik}; результирующее время свободного пробега $\overline{\tau_k}$ будет, разумеется, меньше любого τ_i. Чтобы получить $\overline{\tau_k}$, мы должны просуммировать все столкновения за 1 *сек*:

$$\bar{w}_k = \overline{\sum_i w_{ik}} = \sum_i \frac{1}{\tau_{ik}},$$

и, следовательно,

$$\overline{\frac{1}{\tau_k}} = \sum_i \overline{\frac{1}{\tau_{ik}}}. \qquad (5.7)$$

Соотношение (5.7) также не является строгим и точным; в дальнейшем мы должны будем учесть, что не каждое столкновение приводит к полной потере направленной составляющей скорости и что время свободного пробега электрона для каждого типа столкновений по-своему зависит от его энергии, и внести в формулу (5.7) соответствующие коррективы.

В приведенных выше формулах время релаксации τ может быть выражено через среднюю длину свободного пробега и среднюю тепловую скорость:

$$\tau = \overline{\left(\frac{l}{v}\right)} \approx \left(\frac{\bar{l}}{\bar{v}}\right),$$

соответственно подвижность

$$u \approx \frac{e}{m}\frac{\bar{l}}{\bar{v}} \qquad (5.8)$$

и электропроводность

$$\sigma \approx \frac{e^2}{m}\frac{\bar{l}}{\bar{v}}n. \qquad (5.9)\ ^{*)}$$

---

*) Знак «приближенно» в последних двух формулах поставлен, так как $(\overline{l/v}) \approx \bar{l}/\bar{v}$.

Таким образом, на первый взгляд может показаться, что проблема решена: получены формулы для подвижности и электропроводности — остается только пользоваться этими формулами. Однако, не преуменьшая значения формул (5.3), (5.4) и (5.9), связывающих электропроводность и подвижность, а также выражающих макроскопические параметры вещества через микроскопические параметры носителей, следует подчеркнуть, что целый ряд вопросов остался нерешенным.

Некоторые из этих вопросов попытаемся решить или, по крайней мере, отметить путь решения, по поводу других укажем лишь соответствующую литературу.

УТОЧНЕНИЕ ПОНЯТИЯ О СТОЛКНОВЕНИИ

Во-первых, мы предположили, что движение электрона можно рассматривать в виде чередующихся периодов сво-

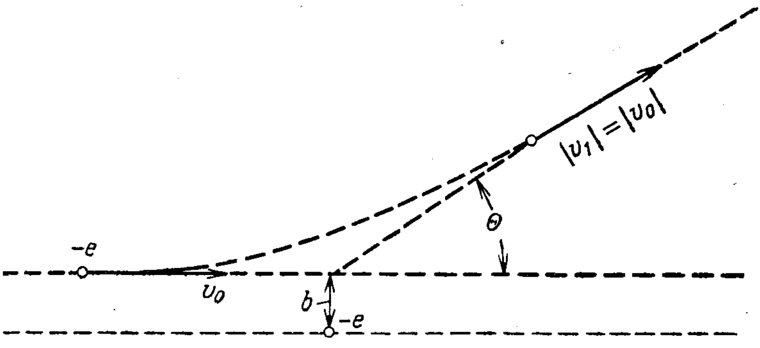

Рис. *5.1.* Траектория движения электрона вблизи примесного иона.

бодного полета и мгновенных соударений, что далеко не всегда можно сделать. Так, даже в таком простейшем случае, как рассеяние на ионах примеси, взаимодействие никак нельзя считать мгновенным. В этом случае электрон постепенно отклоняется от направления своего первоначального движения все время, пока находится в поле иона; при этом, если прицельное расстояние b (рис. 5.1) будет сравнимо со средним расстоянием между ионами (а это как раз наиболее типичный случай), то отклонения на любых участках траектории будут сравнимы, и понятия столкновения и времени свободного пробега должны быть существенно пересмотрены.

Существует ряд случаев, когда теория требует более радикального пересмотра. Наибольшие трудности в этом отношении представляют вещества с малой подвижностью; в частности, случай, когда длина свободного пробега электрона меньше его длины волны,

$$l < \lambda, \tag{5.10}$$

значительно более сложен.

Уже само соотношение (5.10) показывает, что ситуация требует тщательного анализа — трудно представить волну, которая рассеивается (или затухает), не совершив ни одного колебания; но неравенству (5.10) можно придать еще более наглядный вид, воспользовавшись соотношением де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$ и заменив длину свободного пробега через время $l = \tau v$:

$$v\tau < \frac{h}{mv} \text{ или } mv^2 < \frac{h}{\tau}. \tag{5.11}$$

Однако согласно принципу неопределенности h/τ есть неопределенность энергии электрона. Таким образом, согласно (5.11) неопределенность энергии электрона становится больше его кинетической энергии. Это значит, что взаимодействие электрона с дефектами или колебаниями решетки (фононами) так велико, что электрон уже нельзя рассматривать как самостоятельную свободную частицу (даже с поправкой на эффективную массу), а само взаимодействие — как последовательность независимых столкновений (переходов). Если причиной неравенств (5.10) и (5.11) является взаимодействие электрона с примесными ионами, то мы должны учесть их влияние на энергетический спектр электрона *).

---

*) Мы уже упоминали, что за последнее время рядом авторов разработана теория ионных полупроводников с малой подвижностью, в которой учитывается сильное взаимодействие электронов с фононами, приводящее к образованию так называемых поляронных состояний с характерной для этого случая экспоненциальной зависимостью подвижности от температуры (в определенном интервале температур) [9].

Выше, при вычислении средней скорости электрона, мы сразу же заменили время свободного пробега его средним значением, никак это не обосновав. В действительности же время свободного пробега может зависеть от целого ряда факторов (эффективной массы и энергии носителей, температуры, характера и числа рассеивающих центров), и выявление этих зависимостей — одна из главных задач теории явлений переноса.

Мы вернемся к этому в следующем параграфе, а теперь начнем с учета статического разброса времени свободного пробега. При этом мы сделаем простейшее и наиболее естественное допущение: предположим, что вероятность того, что электрон столкнется в течение промежутка времени dt, пропорциональна dt/τ, где $1/\tau$ — пока неизвестный параметр.

Обозначим вероятность того, что электрон летел в течение времени t без столкновения $p(t)$. Тогда вероятность того, что электрон пролетел время t без столкновений, а затем испытал столкновение за время dt, будет равна произведению вероятностей этих двух событий:

$$dw(t) = p(t)\frac{dt}{\tau}.$$

Но это $dw(t)$ и есть уменьшение $p(t)$ за время dt: $dw = -dp$; следовательно,

$$dp = -p\frac{dt}{\tau} \text{ и } p = \mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}} \tag{5.12}$$

(если начать отсчет с момента после столкновения, когда $p = 1$).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы вычислить все величины:

$$\bar{t} = \int\limits_0^\infty t\,dw(t) = \tau, \tag{5.13}$$

$$\bar{v}_x = \int\limits_0^\infty v_{xt}\,dw(t) = \int \left[\bar{v}_{0x} + \frac{eEt}{m}\right] \frac{\mathrm{e}^{\frac{-t}{\tau}}\,dt}{\tau} =$$

$$= \bar{v}_{0x} + \frac{eE\tau}{m} = \frac{eE\tau}{m}. \tag{5.14}$$

Таким образом, действительно, двойка в знаменателе выражения для подвижности (5.2) была лишней.

Мы видим из (5.13) и (5.14), что введенный нами параметр τ приобретает двоякий смысл: это и среднее время между столкновениями, и время релаксации системы; мы к этому вопросу вернемся еще раз позднее, а теперь введем еще некоторые уточнения в понятие соударения.

УПРУГИЕ И НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

При своем движении в направлении электрического поля электрон приобретает не только дополнительную скорость

$$d\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{m} dt,$$

но и энергию

$$d\varepsilon = (\mathbf{F}\, d\mathbf{S});$$

поэтому для того чтобы поддерживалось стационарное состояние, необходимо существование таких соударений, при которых электрон мог бы терять не только направленный импульс, но и дополнительную энергию. Столкновения первого типа, т. е. без значительной потери энергии, называются упругими, второго — неупругими.

Покажем, что столкновения электронов с примесными атомами (без возбуждения последних) и с фононами являются почти упругими.

В тепловом равновесии средние кинетические энергии электронов и атомов должны быть одинаковы и, следовательно, средние скорости атомов $\mathscr{V}$ в $\sqrt{m/M}$ раз меньше (M — масса атома), чем скорость электронов v_0 *), поэтому пренебрежем кинетической энергией атома до соударения (т. е. положим $\mathscr{V}_0 \approx 0$). Тогда законы сохранения энергии и импульса примут вид

$$m\,|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1| = M\mathscr{V}_1, \tag{5.15}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{M\mathscr{V}_1^2}{2}. \tag{5.16}$$

*) Для вырожденного электронного газа это отношение будет еще больше.

Из (5.16) находим

$$\Delta |v| \approx \sqrt{\overline{\Delta v^2}} = \sqrt{\frac{M}{m}}\mathscr{V}_1 \tag{5.17}$$

и, подставляя $\mathscr{V}_1$ из (5.17) в (5.15), получаем

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta v} \approx \sqrt{\frac{M}{m}} \gg 1. \tag{5.18}$$

Соотношение (5.18) показывает, что векторное изменение скорости электрона во много раз больше, чем такое ее изменение по абсолютной величине — это и значит, что столкновение почти упругое.

Этот же результат можно получить в явном виде, получив $\mathbf{v}_1$ из (5.15), подставив его в (5.16) и обозначив угол между v_0 и $\mathscr{V}_1$ через θ:

$$2v_0 \cos\theta = -\mathscr{V}_1\left(\frac{M}{m} \pm 1\right). \tag{5.19}$$

Очевидно, что в (5.19) можно пренебречь единицей по сравнению с M/m; но если читатель возьмет на себя труд проделать промежуточные выкладки, то он убедится, что эта единица «происходит» от кинетической энергии атома в (5.16), иначе говоря, мы тем самым предполагаем соударение упругим. Полагая в (5.19) $\cos\theta = 1$, получаем

$$\mathscr{V}_{\text{макс}} = \frac{2vm}{M} \tag{5.20}$$

или, в общем случае, так как $\cos\theta \leqslant 1$, то

$$M\mathscr{V}_1 \leqslant 2mv_0. \tag{5.21}$$

Неравенство (5.21) имеет очень простой физический смысл. Из закона сохранения энергии следует, что $v_1 < v_0$ *), следовательно, максимальное изменение импульса электрона при упругом лобовом ударе $\Delta p \leqslant (mv_0) - (mv_0) = 2mv_0$. Это и есть максимальный импульс, который может получать атом ($M\mathscr{V}_1$). Из (5.21) находим максимальную энергию отдачи атома:

$$T_{\text{макс}} = \frac{1}{2}M(\mathscr{V}_{\text{макс}})^2 = 4\frac{m}{M}\left(\frac{mv_0^2}{2}\right). \tag{5.22}$$

---

*) Мы предположили, что скорость атома до столкновения $\mathscr{V}^0_0 = 0$, следовательно, электрон передает часть энергии атому, и его скорость после столкновения $v_1 < v_0$.

Выражение (5.22) еще раз показывает, что атом, отобрав у электрона весь импульс, получает лишь ничтожную часть его энергии.

Полученные соотношения характерны для столкновений электрона (или любой другой частицы) с более тяжелой частицей («стенкой») — он охотно отдает импульс, но не может отдать ей (без возбуждения внутренних степеней свободы тяжелой частицы) своей кинетической энергии.

Обратные соотношения имеют место при столкновениях зонных электронов с фотонами видимой и инфракрасной частей спектра. Импульс этих квазичастиц $p_ф = h\nu/c$ очень мал [так как скорость света много больше (примерно в 10^5 раз) скорости звука, а энергия сравнима с энергией электронов], поэтому электрон при излучении или поглощении такого фотона может легко изменить свою энергию, но всегда появляются трудности со «сбытом» импульса. Отсюда возникают правила отбора или необходимость в участии третьей частицы — примесного атома, фонона или др.

Рентгеновские и еще более жесткие фотоны являются уже более «тяжелыми» частицами, так как их энергия и соответственно импульс во много раз больше, поэтому они могут взять на себя и импульс электрона.

К вопросу о взаимодействии электрона с излучением мы вернемся позднее (см. гл. 9), а теперь рассмотрим столкновение электронов с акустическими фононами. Для этого опять напишем законы сохранения энергии и импульса электрона, но на этот раз выразим энергию электрона через его квазиимпульс:

$$\frac{h^2k_1^2}{2m} = \frac{h^2k_0^2}{2m} \pm h\nu, \tag{5.23}$$

$$h\mathbf{k}_1 = h\mathbf{k}_0 \pm h\mathbf{q}. \tag{5.24}$$

Здесь ν и $h\mathbf{q}$ — соответственно частота и квазиимпульс фонона, связанные для акустической ветви:

$$\nu = w_ф q, \tag{5.25}$$

где $w_ф$ — фазовая скорость фонона (скорость звука).

Определив $\mathbf{k}_1$ из (5.24), подставив его в (5.23), после простых преобразований получим соотношение, совершенно аналогичное (5.19):

$$q = \mp 2k_0 \cos\Theta \pm \frac{2mw_ф}{h}, \tag{5.26}$$

где Θ — угол между $\mathbf{k}_0$ и $\mathbf{q}$.

Второй член в правой части (5.26) происходит от энергии фонона ($h\nu$) в (5.23); покажем, что при обычных условиях он мал и что, следовательно, столкновения электронов с фононами также являются упругими. Для этого оценим отношение этого члена к q:

$$\frac{mw_ф}{hq} = \frac{w_ф}{v_0}\frac{mv_0}{hq}. \tag{5.27}$$

(Правая часть выражения (5.27) отличается от левой тем, что мы умножили и разделили ее на скорость электрона и таким образом получили отношение импульсов.) Для того чтобы рассеяние было эффективным, необходимо, чтобы импульс фонона был одного порядка с импульсом электрона *). Следовательно,

$$\frac{mv_0}{hq} \approx 1 \quad \text{и} \quad \frac{mv_0}{hq} \approx \frac{w_0}{v_0} \ll 1.$$

Так как фазовая скорость упругих волн в обычных полупроводниковых кристаллах $w_0 \approx 10^5$ *см/сек*, а средняя скорость теплового движения электронов при комнатной температуре $v_0 \approx 10^7$ *см/сек*, следовательно, при обычных условиях второй член в (5.26) очень мал по сравнению с q и им можно пренебречь, т. е. столкновение с фононом также является почти упругим и согласно (5.26)

$$q \approx \mp 2k_0 \cos\Theta. \tag{5.28}$$

С другой стороны, из (5.26) следует, что при достаточно низких температурах (т. е. таких, при которых $v_0 \approx w_0$) столкновения электронов с фононами перестают быть упругими — фонон перестает быть «тяжелой частицей» по сравнению с электроном **).

---

*) Из (5.24) следует, что если $q \ll k_0$, то $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0$, т. е. электрон просто не «почувствует» столкновения с фононом.

**) Последний результат качественно можно было предсказать с самого начала. Действительно, как мы уже упоминали, для того чтобы соударение электрона с фононом было эффективным, их импульсы должны быть одного порядка; при этих условиях для того чтобы их энергии были сравнимы, необходимо (и достаточно) равенство их скоростей. Оценка показывает, что это имеет место при температурах порядка 1° К.

Из соотношения (5.28) следует очень важный вывод: так как $\cos\Theta \leqslant 1$, то

$$q_{\text{макс}} \leqslant 2k. \tag{5.29}$$ *)

Это значит, что электроны могут взаимодействовать только со сравнительно длинноволновыми фононами. Это иллюстрируется рис. 5.2, на котором приведены кривые дисперсии электронов и фононов и показано, с какими акустическими и оптическими фононами могут взаимодействовать тепловые электроны.

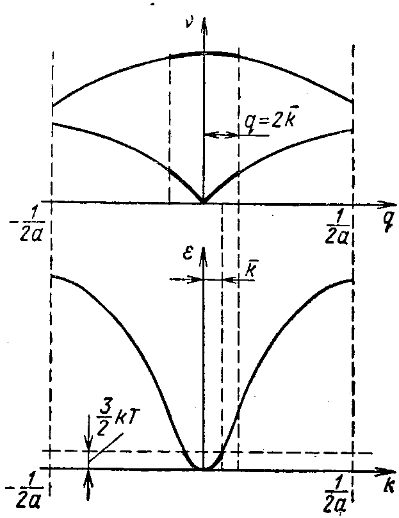

Рис. *5.2.* Кривые дисперсии электронов $\varepsilon(k)$ и фононов $\nu(q)$.

Жирными линиями обведены части спектра, соответствующие тепловым электронам ($\varepsilon \approx {}^3/_2\, kT$) и фононам, которые удовлетворяют неравенству $q < 2k$ (т. е. могут взаимодействовать с этими электронами).

Напротив, оптические фононы, удовлетворяющие этому неравенству (см. тот же рисунок), обладают сравнительно большой энергией, порядка $k\theta_0$ (θ_0 — температура Дебая для оптических колебаний); поэтому столкновения с оптическими фононами можно считать приблизительно упругими лишь при таких температурах, при которых энергия электронов $\varepsilon \gg k\theta_0$ (или при наличии сильного вырождения). При низких температурах столкновения с оптическими фононами также не могут играть существенной роли, так как число их $N_0 e^{-\theta/T}$ очень мало. Поэтому существует промежуточная область температур, в которой неупругие столкновения с оптическими фононами могут играть существенную роль и вызвать ряд аномалий:

---

*) Соотношение (5.29) также легко наглядно интерпретировать: если столкновение упругое, то $|k_1| = |k_0|$ и при «лобовом» столкновении с фононом $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_0$ и $|q| = |2k_0|$. Во всех остальных случаях из условий и построения треугольника импульсов следует, что $q \leqslant 2k$.

а) резкое падение подвижности с ростом температуры;

б) отступления от закона Видемана и Франца (это обусловлено тем, что при наличии неупругих столкновений нельзя ввести одно и то же время релаксации для явлений в электрических и тепловых полях).

Подвижность электронов ограничивают в основном столкновения, лишь связанные с рассеянием на большие углы (приблизительно 180°). Для теплопроводности (и для всех процессов, связанных с переносом тепла) существенны также так называемые «вертикальные переходы», т. е. рассеяние с небольшой потерей импульса, но с потерей энергии *); поэтому время релаксации для теплопроводности становится меньше, чем для подвижности и соответственно уменьшается отношение этих величин ($\varkappa_{\text{эл}}/\sigma$).

Вторым видом неупругих столкновений являются межэлектронные. Эти столкновения также совершенно по-разному влияют на электрические и тепловые явления.

При наличии только электрического и магнитного полей межэлектронные столкновения приводят лишь к перераспределению импульса между электронами, но так как общий импульс при этом сохраняется, то сами по себе они не могут ограничить подвижность (и электропроводность). Если же имеется дополнительно другой механизм рассеяния носителей с большой дисперсией (т. е. зависимостью длины свободного пробега от энергии), то эти столкновения могут косвенно повлиять на подвижность и уменьшить ее, перераспределив энергию между электронами. Поэтому роль межэлектронных столкновений проявляется при «промежуточных» концентрациях электронов приблизительно 10^{19} и средних температурах, т. е. когда концентрация электронов достаточно велика, чтобы вероятность межэлектронных столкновений была значительна в то время, когда нет вырождения (при наличии вырождения столкновения уже не могут изменить распределения по энергиям).

Значительно сильнее межэлектронные столкновения влияют на тепловые процессы и термомагнитные явления. Здесь мы имеем дело со встречными потоками электронов (от горячего конца образца к холодному и обратно),

---

*) Формально это проявляется в том, что в данном случае в интегралах переноса появляется множитель $\varepsilon - \mu$, который меняет знак при пересечении поверхности Ферми.

и поэтому эти столкновения приводят непосредственно к потере импульса, ограничивают теплопроводность и существенно изменяют термомагнитные коэффициенты.

Межэлектронные столкновения, так же, как и столкновения электронов с оптическими фононами, приводят к уменьшению числа Лоренца *).

Таким образом, мы рассмотрели два типа почти упругих столкновений — с дефектами и акустическими фононами, и два неупругих — с оптическими фононами и межэлектронные, и убедились, что неупругие столкновения играют существенную роль лишь в ограниченном интервале температур и концентраций носителей. Поэтому (а также потому, что рассмотрение неупругих процессов весьма сложно) мы их в дальнейшем учитывать не будем и будем считать, таким образом, что наиболее важные для рассеяния электронов столкновения (с тепловыми колебаниями и примесными атомами) являются почти упругими. Из проведенных выше выкладок следует, что при расчете времени, длины свободного пробега и подвижности можно пренебречь изменением абсолютной величины скорости и квазиимпульса электрона. Но из этого отнюдь не следует, что такое пренебрежение правомерно при анализе всех процессов. Как уже упоминалось выше, при движении в электрическом поле электроны непрерывно увеличивают свою кинетическую энергию, и для поддержания теплового равновесия необходимо, чтобы существовал механизм «сброса» этой избыточной энергии.

Анализ, проведенный выше, показывает, что обмен энергией между электронами, с одной стороны, и акустическими тепловыми колебаниями, с другой, весьма затруднен, но все же он происходит и именно он обеспечивает сохранение теплового равновесия между электронным газом и кристаллом в целом при отсутствии более эффективных (неупругих) столкновений.

Впрочем, при достаточно сильных полях электрон настолько быстро набирает энергию, что не успевает отдавать ее решетке, и с этим связан целый ряд весьма интересных явлений (зависимость подвижности и концентрации носителей от поля и др.), которые мы рассмотрим в конце этой

*) Различное влияние разного вида соударений на различные процессы приводит к тому, что показатель степени r в зависимости длины свободного пробега электрона от его энергии может быть неодинаковым в различных кинетических коэффициентах.

главы. Пока же отметим, что в обычных условиях электрон при столкновениях с акустическими фононами приблизительно во сто раз медленнее теряет свою избыточную энергию, чем свой направленный импульс. При этом не каждое столкновение приводит сразу же к потере направленного импульса; анализу этого важного уже сейчас для нас вопроса посвящен следующий раздел.

БОЛЕЕ ТОЧНЫЙ ПОДСЧЕТ ПОТЕРИ НАПРАВЛЕННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СКОРОСТИ

В начале этой главы мы предположили, что каждое столкновение приводит к полной потере направленной (вдоль поля) составляющей скорости, т. е. что направление скорости электрона после столкновения совершенно не зависит от направления скорости до столкновения. В действительности это не всегда так. Например, при

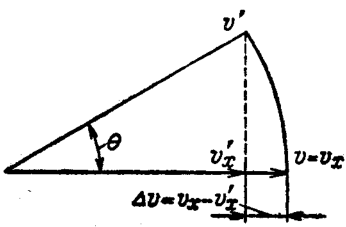

Рис. *5.3.* Изменение направленной составляющей скорости электрона при упругом рассеянии.

рассеянии электрона на примесном ионе (см. рис. 5.1) угол отклонения электрона Θ зависит от прицельного расстояния b и от скорости электрона (чем медленней движется электрон, тем больше времени он находится вблизи иона и тем сильнее отклоняется), от массы электрона и диэлектрической постоянной кристалла.

Из проведенного выше рассмотрения взаимодействия электронов с фононами следует, что угол отклонения электрона также зависит от импульса (волнового вектора) фонона. Внесем соответствующее обобщение в понятие времени релаксации.

Предположим, что электрон до столкновения имел направленную вдоль поля скорость v и при столкновении отклонился на угол Θ (рис. 5.3) (будем считать, что абсолютное значение скорости при этом не изменилось — столкновение упругое). Так как при этом скорость электрона по абсолютной величине не изменится (столкновение упругое), то мы найдем время релаксации лишь для установления равновесия электронов в пределах определенного шарового слоя в пространстве импульсов (т. е. для электронов с заданной по абсолютной величине скоростью). В дальнейшем нам еще предстоит провести усреднение по энергиям.

В результате столкновения направленная составляющая скорости v_x уменьшится на величину

$$\Delta v = v\,[1-\cos(v,\ v')]. \qquad (5.30)$$

Если вероятность такого столкновения (или, точнее, число таких столкновений в 1 *сек*) $w(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, то соответствующее уменьшение скорости за 1 *сек* будет

$$\Delta v w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = v\,[1 - \cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}')]\, w(\mathbf{v}, \mathbf{v}'). \tag{5.31}$$

Для того чтобы получить полное уменьшение скорости за 1 *сек*, мы должны просуммировать (или проинтегрировать) выражение (5.31) по всевозможным столкновениям, соответствующим отклонениям на разные углы:

$$\Delta\bar{v} = \sum_{\mathbf{v}'} v\,[1 - \cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}')]\, w(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \tag{5.32}$$

или

$$\Delta\bar{v} = \sum_{\Theta} v\,(1 - \cos\Theta)\, w(\Theta), \tag{5.33}$$

где

$$\Theta = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}').$$

Если за одну секунду направленная составляющая скорости v уменьшается на величину $\Delta\bar{v}$, то время, необходимое для ее полного исчезновения, будет $v/\Delta\bar{v}$; это время мы будем в дальнейшем считать эффективным временем свободного пробега или временем релаксации τ. Таким образом,

$$\tau = \frac{v}{\Delta\bar{v}} = \frac{1}{\sum\limits_{\Theta} (1 - \cos\Theta)\, w(\Theta)} \tag{5.34}$$

или

$$\frac{1}{\tau} = \sum_{\Theta} (1 - \cos\Theta)\, w(\Theta). \tag{5.35}$$

Выражение (5.35) можно вывести точно так же и в волновой форме, т. е. получить время релаксации не как функцию скорости, а как функцию волнового числа. Действительно, предположим, что вероятность перехода электрона из состояния с импульсом k в состояние с импульсом k' будет $w(k, k')$; уменьшение направленного импульса при этом

$$\Delta k = k\,[1 - \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}')].$$

Не повторяя выкладок и рассуждений, приведенных для корпускулярного представления, получим

$$\frac{1}{\tau(k)} = \sum_{\mathbf{k}'} [1 - \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}')]\, w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tag{5.36}$$

или

$$\frac{1}{\tau(k)} = \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\Delta k}{k}\, w(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \tag{5.37}$$

Если $w(\Theta)$ — число столкновений, вызывающих отклонение электрона на угол Θ, то время между такими столкновениями $\tau(\Theta) = \frac{1}{w(\Theta)}$; таким образом, формулу (5.37) можно записать и в следующем виде:

$$\frac{1}{\tau(k)} = \sum \overline{(1-\cos\Theta)} \frac{1}{\tau(\Theta)}. \tag{5.38}$$

Выражения (5.36) и (5.37) могут быть написаны и в интегральной форме, например:

$$\frac{1}{\tau(k)} = \int\limits_{\mathbf{k}'} w(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\,[1-\cos(k, k')]\,dk'. \tag{5.39}$$

Формула (5.38) является обобщением (5.7) с учетом того, что столкновения определенного сорта не обязательно приводят к полной потере скорости *).

Если ввести для каждого вида столкновений эффективное время свободного пробега и определить его следующим образом:

$$\tau_{i\ \text{эф}} = \overline{\frac{\tau_i(\Theta)}{(1-\cos\Theta)}}, \tag{5.40}$$

то (5.38) примет вид, совершенно аналогичный (5.7):

$$\frac{\bar{1}}{\tau_{\text{эф}}} = \sum_i \frac{\bar{1}}{\tau_{\text{эф}\ i}}. \tag{5.40a}$$

Соотношения (5.38) и (5.39) все еще не являются строгими и точными — в них не учтено то обстоятельство, что для различных типов столкновений время свободного пробега электрона по-разному зависит от его энергии. Учет энергетической зависимости $\tau(\varepsilon)$ и вычисление средних значений с учетом этой зависимости и является задачей следующих параграфов.

5.2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ (УЧЕТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ)

В самом начале этой главы мы убедились в том, что неправильный учет статистического разброса времени релаксации сразу же приводит к ошибке в абсолютном значении подвижности в 2 раза.

Еще к более серьезным последствиям может привести неучет (или неправильный учет) энергетической зависимости

*) Если мы положим средний угол отклонения $\Theta = 90°$ (что и означает полную потерю направленной составляющей скорости), то (5.38) сразу же переходит в (5.7).