

Если исходить из фононных представлений, т. е. рассматривать распространение упругих волн как хаотическое движение фононного газа, то можно получить для теплопроводности решетки выражение, формально совершенно идентичное (6.48):

$$\kappa_p = \frac{1}{3} C l \omega_{\text{гр}} = \frac{1}{3} C \tau \omega_{\text{гр}}^2, \quad (6.59)$$

где C — теплоемкость решетки; l и τ — длина и время свободного пробега фононов и $\omega_{\text{гр}}$ — их скорость.

Это же выражение для κ_p получил в 1914 г. Дебай из волновой картины, рассматривая кристалл как упругий континуум и учитывая рассеяние тепловых волн на изменениях плотности, вызванных ангармоничностью колебаний.

Однако выражение (6.59) было бы удобно для анализа, если бы все величины, входящие в его правую часть, были одинаковы для всех колебаний. В действительности это, разумеется, не так, и вычисление средних величин связано в данном случае с такими трудностями, что формула (6.59) в таком виде, как она написана, даст немногим больше, чем представление о размерности κ_p .

Более того, недостаточно осторожное применение этой формулы может привести к серьезным ошибкам. В гл. 2 мы установили, что за перенос энергии «ответственна» групповая скорость фононов $\omega_{\text{гр}}$, которая колеблется в весьма широких пределах. Групповая скорость для всех оптических ветвей (представляющих, по сути дела, внутримолекулярные колебания) относительно мала, поэтому в (6.59) можно исключить часть теплоемкости, обусловленную этими колебаниями. Но как мы видели, для коротковолновых акустических колебаний $\omega_{\text{гр}} = 0$, и их, следовательно, тоже надо исключить из (6.59); таким образом, значение ω и C в (6.59) становится весьма неопределенным.

Вычислить среднюю длину свободного пробега еще сложнее, и расчет и опыт показывают, что при этом усреднении легко ошибиться в сотни раз, так как длина свободного пробега для фононов различной частоты и поляризации отличается на много порядков; так, для продольных длинноволновых колебаний акустической ветви она дости-

гает макроскопических размеров *), в то же время для коротковолновых колебаний l бывает ничтожно мало — порядка межатомных расстояний. Таким образом само представление о волнах, а следовательно и фонах, становится сомнительным.

Впрочем, как это часто бывает, исключительные трудности приводят в конце к упрощению ситуации. В данном случае чрезвычайно широкий диапазон длин свободного пробега приводит к тому, что в теплопроводности необходимо учитывать в первую очередь перенос тепла длинноволновыми продольными акустическими волнами, что значительно упрощает задачу. После этих вводных замечаний перейдем непосредственно к вычислению κ_p . Будем исходить из общего выражения для теплового потока

$$Q = \sum N_q \hbar \omega_q \bar{v}_q \quad (6.60)$$

(аналогичного выражению $Q = \varepsilon \bar{n} \bar{v}_x$, где $\varepsilon = \hbar \omega$, $n = \sum N_q$ и $\bar{v}_x = \bar{\omega}_q$).

Суммирование, вообще говоря, надо проводить по всем ветвям, по всем длинам волн и по всем (трем) видам поляризации. В таком виде подсчет (6.60) был бы неразрешимой задачей, однако с учетом замечаний, сделанных выше, можно ограничиться суммированием по длинноволновым продольным акустическим фонам. Для этих колебаний кристалл можно рассматривать как континуум и сумму заменить интегралом; таким образом, задача сильно упрощается.

Основная трудность остается в вычислении N_q — неравновесной функции распределения, при этом мы не можем заменить $N_q \rightarrow N_{q0}$ равновесным распределением Эйнштейна, так как поток обратится в нуль. Для того чтобы определить N_q , мы должны решить кинетическое уравнение для фононов:

$$\left(\frac{\partial N_q}{\partial t} \right)_{\text{дрейф}} = \left(\frac{\partial N_q}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} \quad (6.61)$$

Вычисление дрейфового члена в данном случае еще более просто, чем в случае электронов (так как фононы —

*) Непосредственное измерение этой величины на кремнии при комнатной температуре дало «астрономическое значение» — десятки микрон.

незаряженные частицы и в данном случае отсутствует член, содержащий электрическое поле)*):

$$\left(\frac{\partial N_q}{\partial t}\right)_{\text{дрейф}} = \frac{\partial N_q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial N_q}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial N_q}{\partial T} \omega_{\text{гр}} \nabla T. \quad (6.62)$$

Значительно сложнее обстоит дело с членом столкновений. Рассмотрим, какими причинами может вызываться рассеяние фононов. В идеальном кристалле с упругими межатомными силами гармонические волны распространяются независимо друг от друга, не взаимодействуют и не затухают, точно так же, как электромагнитные колебания в пустоте. Это видно из того, что общее решение уравнения (2.146) представляет собой сумму независимых незатухающих колебаний. Иными словами, для идеального кристалла гармонические волны являются стационарными состояниями; их вероятность рассеяния — вероятность перехода одного в другое, равна нулю.

Эта вероятность становится отличной от нуля в результате возмущений — нарушения периодичности потенциала. Такими возмущениями могут быть:

1) чужеродные атомы, атомы в междуузлиях и пустые узлы (так называемые «точечные дефекты»**).

2) линейные дефекты — дислокации;

3) плоские дефекты — границы кристалла и зерен в поликристаллическом образце;

4) объемные дефекты — трещины, полости, поры, включения другой фазы;

5) ангармоничность колебаний, обуславливающая их взаимодействие, или, на корпускулярном языке, рассеяние фононов на фононах.

Если первые четыре причины рассеяния могут (по крайней мере в принципе) отсутствовать, то последняя всегда есть и в этом смысле является наиболее общей и наиболее важной, поэтому мы начнем с ее рассмотрения. Взаимодействие нормальных колебаний можно рассматривать и на волновом и на корпускулярном языке. На волновом языке

*) Будем считать, что градиент температуры направлен по оси x , и рассматривать одномерную задачу.

**) Все перечисленные выше дефекты можно называть точечными лишь в том случае, когда размер вносимого ими искажения много меньше длины волны. В действительности это не всегда имеет место (не для всех перечисленных дефектов и не для всех длин волн).

это означает следующее. Если по кристаллу распространяется волна $\Phi_1 = A_1 e^{2\pi i(q_1 x - \omega_1 t)}$, то из-за ангармоничности она вызывает периодические колебания (модуляцию) упругих постоянных f и плотности ρ , т. е. создает таким образом объемную решетку, движущуюся с фазовой скоростью $\omega_\Phi = \omega/q$ по окристаллу*). Другие волны будут дифрагировать на этой решетке, причем нетрудно показать, что если волна Φ_2 взаимодействует с волной, то при этом появится новая волна, амплитуда которой зависит от взаимодействия волн Φ_1 и Φ_2 , т. е. от степени ангармоничности колебаний, а частота и волновой вектор удовлетворяют условиям

$$\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2, \quad (6.63)$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 \pm \mathbf{q}_2. \quad (6.64)$$

На корпускулярном языке это означает, что в результате столкновений два фонана (ω_1, \mathbf{q}_1) и (ω_2, \mathbf{q}_2) превратились в фонon третьего сорта (ω_3, \mathbf{q}_3) . С этой корпускулярной точки зрения соотношения (6.63) и (6.64) означают соблюдение при таких (так называемых трехфононных) столкновениях законов сохранения энергии и импульса. Приведенные выше рассуждения относятся к знаку плюс в формулах (6.63) и (6.64). Знак минус перед ω_2 и \mathbf{q}_2 означает, что фонon (ω_1, \mathbf{q}_1) «распался» на два (ω_2, \mathbf{q}_2) и (ω_3, \mathbf{q}_3) .

На первый взгляд может показаться, что наряду с трехфононными могут существовать более простые, двухфононные процессы рассеяния. Но в действительности, если написать законы сохранения для этого случая, то мы получим

$$\omega_1 = \omega_2 \text{ и } \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 \quad (6.65)$$

и убедимся, что они означают неизменность частоты и волнового вектора, т. е. отсутствие рассеяния. В действительности могут существовать более сложные, четырехфононные процессы, но вероятность их относительно мала.

Возможность существования двухфононных процессов появляется при наличии третьего тела — какого-либо дефекта решетки, которому фонon может отдать часть

*) При гармонических колебаниях $\rho/f = \text{const}$, поэтому такие колебания не вызывают изменения скорости распространения упругих волн и коэффициента преломления, а следовательно, и не рассеивают друг друга.

энергии (при неупругом рассеянии) или импульса (при упругом).

Таким образом, соотношения (6.63) и (6.64) описывают простейшие и наиболее вероятные процессы рассеяния фононов на фононах.

Однако, как показал еще в 1934 г. Паейрлс, такие процессы не могут быть «ответственными» за конечную теплопроводность, т. е. если бы не существовало никаких других столкновений, кроме этих, теплопроводность кристалла была бы бесконечна. Действительно, напишем еще раз выражение для теплового потока:

$$Q = \sum h\omega_q \omega_{гр} N_q. \quad (6.66)$$

Заменяя в (6.66) $\omega_q = \omega_\phi q$ и пренебрегая дисперсией, т. е. считая $\omega_{гр} = \omega_\phi = \text{const}$, получим

$$Q = \bar{\omega}^2 \sum h_q N_q = \bar{\omega}^2 P, \quad (6.67)$$

где P — полный импульс фононной системы. Но соотношение (6.64) показывает, что при рассмотренных выше столкновениях суммарный импульс фононов не меняется и такие столкновения не будут ограничивать теплопроводность кристалла. Такие процессы [т. е. описываемые соотношениями (6.63) и (6.64)] Паейрлс назвал нормальными N -процессами. Но он также показал, что наряду с N -процессами (которые являются единственно разрешенными процессами для непрерывного континуума) в периодической среде (кристаллической решетке) могут происходить процессы, при которых соотношение (6.63) сохраняется, а соотношение (6.64) заменяется более общим:

$$q_3 = q_1 \pm q_2 \pm g, \quad (6.68)$$

где g — вектор обратной решетки.

Такие столкновения были названы umclarr-процессами, или процессами переброса. Это означает, что при таких столкновениях сумма волновых векторов не сохраняется, а меняется скачком на величину g . Так как при этом согласно (6.68) полный импульс фононной системы не сохраняется, то такие столкновения дают конечное тепловое сопротивление кристалла. Качественно процессы переброса можно интерпретировать как комбинированную одновременную дифракцию волны ($q_1 \omega_1$) на движущейся со скоростью $\omega_2 = \omega_2/q_2$ решетке с постоянной решетки,

равной $1/q_2^*$), и на неподвижной кристаллической решетке с постоянной, равной $1/g^{**}$).

С математической точки зрения появление процессов переброса можно понять из следующих соображений. В гл. 4 мы пришли к выводу, что волновой вектор q в кристалле может меняться в пределах $1/2L < q < 1/2a$, так как $q > 2\bar{L}$ не удовлетворяет граничным условиям, а $q > 1/2a$ всегда можно представить как $q = q' + n/2a$, где n подобрано таким образом, что $q' < 1/2a$; при этом оказывается, что волна q' описывает точно те же колебания атомов, что и q , а волна q добавляет к этому не имеющие физического смысла колебания пустоты между атомами.

Представим теперь, что в (6.64) $q_1 > 1/4a$ и $q_2 > 1/4a$, тогда $q_3 > 1/2a$, т. е. q_3 попадает в область «запрещенных» значений. Заметив в соответствии со сказанным выше, что $q_3 = q'_3 + g$, где g — вектор обратной решетки, мы получим уравнение (6.68), описывающее процессы переброса.

Из сказанного не следует делать вывод, что N -процессы можно вообще исключить из рассмотрения (так как они не вносят конечного теплового сопротивления). В действительности их весьма существенное влияние проявляется в том, что они приводят к перераспределению импульса между фононами. (С подобными явлениями мы уже сталкивались при анализе влияния межэлектронных столкновений, см. гл. 4 и 5.)

Как мы уже много раз упоминали, обычные столкновения (т. е. столкновения с потерей импульса) стремятся установить равновесное распределение по скоростям и энергиям; для электронов — это распределение Ферми

$$f_0 = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} + 1},$$

для фононов — это распределение Бозе — Эйнштейна

$$N_q^* = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - 1}. \quad (6.69)$$

*) Эта решетка создается колебаниями плотности, обусловленными второй волной.

**) Так как кристаллическая решетка неподвижна, то ее участие в соударении не вносит никаких дополнительных членов в уравнение (6.63).

N -процессы не могут установить нормального распределения, так как общий импульс, а следовательно, и средняя скорость дрейфа всей системы фононов при них сохраняется; можно показать, что они приводят к *нормальному распределению в потоке*:

$$N_q(\lambda) = [\exp \hbar (\omega_q + \lambda q) / kT - 1]^{-1}, \quad (6.70)$$

где λ — параметр, характеризующий скорость потока. Наличие в (6.70) члена λq приводит к тому, что количество фононов с одинаковым по абсолютным значениям q , а следовательно, и $\omega_q = \omega_{\phi} q$, но с противоположным направлением движения, $(-q)$ и $(+q)$, становится неодинаковым. Как видно из (6.70), при положительном λ

$$N_{+q}(\lambda) < N_{-q}(\lambda). \quad (6.71)$$

Можно показать, что (6.70) представляет собой распределение, движущееся в направлении $-q$ со скоростью 2λ . Заменяя в (6.70) $\omega_q = \omega q$, можно переписать его в виде

$$N_{\pm q}(\lambda) = [\exp \hbar [q] (\omega \pm \lambda) / kT - 1]^{-1}, \quad (6.72)$$

где уже явно видно, что (6.72) характеризует распределение, движущееся со скоростью 2λ .

Учитывая лишь косвенное влияние N -процессов на тепловые сопротивления, рассмотрим интеграл столкновений, учитывая пока лишь процессы переброса.

Будем искать N_q в виде

$$N_{q1} = N_{q1}^{\circ} + n_{q1}, \quad (6.73)$$

где N_{q1}° — равновесная функция распределения и n_{q1} — небольшая неравновесная добавка.

Как следует из (6.63) и (6.64), столкновения фононов (в отличие от электронных столкновений) отнюдь не упруги: $\omega_{q1} \neq \omega_{q3} \neq \omega_{q2}$; это значит, что скорость восстановления равновесия для фононов с волновым вектором q_1 зависит от чисел заполнения во всем фазовом пространстве. Следовательно, если мы попытаемся ввести время релаксации $\tau(q_1)$, то оно окажется весьма сложной функцией от времени и от всех чисел заполнения (q_2 и q_3), т. е. по существу потеряет всякий смысл.

Однако положение облегчают следующие обстоятельства. Как мы уже упоминали, за теплопроводность в основном «ответственны» длинноволновые фононы, для которых

время релаксации и длина свободного пробега много больше, чем для всех остальных. В то же время длинноволновые фононы теряют импульс в основном при столкновениях с коротковолновыми фононами. Это следует из того, что, во-первых, коротковолновых фононов во много раз больше и, во-вторых, как видно из (6.68), длинноволновые фононы не могут непосредственно принимать

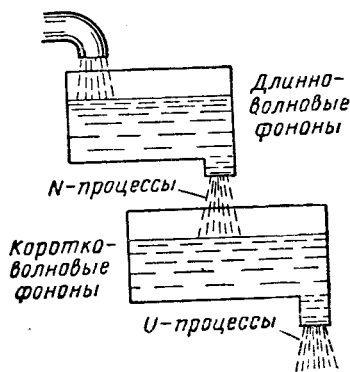


Рис. 6.12. Иллюстрация механизма рассеяния длинноволновых и коротковолновых фононов.

(так как для коротковолновых фононов время релаксации намного меньше, то и их числа заполнения куда ближе к равновесным). После этого правая часть (6.61) становится функцией от N_{q2}° , N_{q3}° (которые есть не что иное, как распределение Бозе — Эйнштейна для соответствующих групп фононов) и от единственной неизвестной величины

$$n_{q1} = N_{q1} - N_{q1}^{\circ}, \quad (6.74)$$

которую и нужно найти. При этих условиях правая часть (6.61) может быть приведена к виду

$$\left(\frac{\partial N_{q1}}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} = \frac{N_{q1} - N_{q1}^{\circ} *}{\tau_q}, \quad (6.75)$$

т. е. это значит, что уже может быть введено время релаксации.

*) В дальнейшем индекс «1» при q мы будем опускать.

Заменяя в левой части (6.61) N_q на N_q^* , получаем*)

$$\omega_q \frac{\partial N_q^*}{\partial T} \nabla T = \frac{N_q - N_q^*}{\tau(q)} = \frac{n_q}{\tau(q)}, \quad (6.76)$$

и, следовательно,

$$n_q = \tau(q) \omega_q \nabla T \frac{\partial N_q^*}{\partial T}. \quad (6.77)$$

Подставив полученное выражение (6.77) для n_q — неравновесной части функции распределения фононов, вместо N_q в (6.66), можно получить выражение для фононной теплопроводности. Таким образом, при сделанных выше упрощениях вопрос сводится к определению времени релаксации для фононов.

Однако эта задача весьма трудна. Преимуществом выражения (6.77) является то, что оно написано в таком общем виде, что в него могут быть включены все виды рассеяния:

$$\tau_q^{-1} = \tau_L^{-1} + \tau_I^{-1} + \tau_p^{-1} + \tau_d^{-1} + \tau_\phi^{-1}, \quad (6.78)$$

где τ_L — время релаксации для рассеяния на границах зерен; τ_I — время релаксации для рассеяния за счет так называемого изотопического эффекта, т. е. разности масс примесных атомов и основных атомов решетки; τ_p — время релаксации, обусловленное изменением атомных объемов и коэффициента упругой связи, вносимых примесными атомами; τ_d — время релаксации при рассеянии на дислокациях и τ_ϕ — время релаксации при рассеянии фононов на фононах.

При этом для каждого процесса рассеяния должно быть в отдельности вычислено соответствующее время релаксации, что было сделано рядом авторов с большей или меньшей точностью (см., например, [21]). Основным результатом этих вычислений являются дисперсионные зависимости, т. е. зависимости времени релаксации τ от частоты ω , которые мы приведем ниже:

1) при «изотопическом» рассеянии (т. е. рассеянии из-за разности масс примесного и основных атомов $\tau_I^{-1} = I\omega^4$, где I — коэффициент, пропорциональный числу примесей N_I и разности масс в квадрате: $I \sim N_I (\Delta M_I)^2$; в ряде

*) Подробно о методах решения кинетического уравнения для фононов см. [12] и [21].

случаев этот коэффициент может быть вычислен в явном виде [см. 21];

2) при рассеянии на границах кристалла $\tau_L^{-1} = c/L$, где c — коэффициент порядка единицы, а L — характерная длина — приблизительно радиус круга, по сечению равного наименьшему сечению кристалла (следует отметить, что это единственный тип рассеяния, при котором время релаксации не зависит от частоты);

3) при рассеянии на деформациях решетки $\tau_p^{-1} \sim q^4$;

4) при рассеянии на дислокациях $\tau_d^{-1} \sim q$;

5) наибольшие трудности представляет вычисление времени релаксации для рассеяния фононов на фононах τ_ϕ . Первым делом мы должны отметить тот факт, что непосредственно в выражение (6.78) для τ_q^{-1} можно включить только U -процессы, приводящие к установлению равновесного распределения (N_q°), но нельзя включить N -процессы, так как они приводят к распределению N_q^λ , а не N_q° .

По аналогии с (6.75) можно написать для N столкновений

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{столкн}} = \frac{N_q^\lambda - N_q}{\tau_N} \quad (6.79)$$

и с учетом N -процессов и всех остальных видов рассеяний, входящих в τ_q^{-1} , переписать (6.79) в виде

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_{\text{столкн}} = \frac{N_q^\circ - N_q}{\tau_q} + \frac{N_q^\lambda - N_q}{\tau_N}. \quad (6.80)$$

Параметр λ может быть вычислен из того условия, что нормальные процессы не изменяют полного импульса системы фононов. Уравнение (6.80) после этого приводится к виду, аналогичному (6.75), при этом для τ_ϕ получается следующее выражение (см. [30]):

$$\tau_\phi^{-1} = (B_N + B_U) T^3 \omega^2, \quad (6.81)$$

где коэффициенты B_N и B_U характеризуют интенсивность нормальных процессов и процессов переброса. Таким образом, более или менее точно могут быть вычислены все слагаемые, входящие в (6.78).

Зная выражение для τ_q , можно воспользоваться соотношением (6.60) для определения потока тепла и теплопроводности:

$$Q = \sum n_q \hbar \omega_q v_q. \quad (6.82)$$

Так как в теплопроводности принимают участие только длинноволновые фононы, то сумма (6.82) может быть заменена интегралом; таким образом получаем

$$\kappa_p = \frac{4\pi}{3(2\pi)^3} \int \tau(q) C(q) \omega_q^2 q^2 dq, \quad (6.83)$$

где

$$C(q) = \frac{d}{dT} (\hbar\omega_q N_q^*) = \frac{(\hbar\omega)^2}{kT^2} \frac{e}{(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^2}. \quad (6.84)$$

Следует подчеркнуть, что из (6.78) отнюдь не следует, что тепловое сопротивление решетки $1/\kappa_p$ складывается аддитивно из сопротивлений, обусловленных различными видами дефектов и межфононным взаимодействием:

$$\frac{1}{\kappa_p} \neq \sum_i \frac{1}{\kappa_i}. \quad (6.85)$$

Объясняется это тем, что различные виды рассеяния имеют различные зависимости от ω (а следовательно, и от q) и от температуры. Поэтому при наличии нескольких видов рассеяния интегрирование выражения (6.83) дает сложную зависимость от температуры и концентрации различных видов дефектов. Правило Маттисона (т. е. аддитивность различных видов сопротивлений) имеет место тогда, когда один тип рассеяния превалирует над всеми остальными. Отметим некоторые закономерности, которые вытекают из выражения (6.83).

Так как при достаточно низких температурах все виды колебаний «вымерзают», за исключением очень длинных волн, а для последних играет роль рассеяние только на границах зерен и при этом l не зависит от температуры, то поэтому при $T \rightarrow 0$ теплопроводность должна изменяться аналогично изменению теплоемкости, т. е. $\kappa \sim T^3$ при $T \rightarrow 0$. По мере роста температуры начинают «бороться» два фактора: 1) рост числа колебаний, переносящих тепло и 2) рост межфононного рассеяния. Короткие волны и оптические фононы почти не переносят тепло, но играют существенную роль в рассеянии длинноволновых фононов, поэтому теплопроводность переходит через максимум при температуре, значительно ниже дебаевской, и вначале после максимума падает быстрее, чем T^{-1} (рис. 6.13).

В кристаллах, не содержащих дефектов, теплопроводность при температурах выше дебаевской обратно про-

порциональна температуре при небольшом количестве дефектов:

$$\frac{1}{\kappa_p} = aT + b \quad (6.86)$$

(т. е. сопротивление, вносимое фононным и дефектным рассеяниями, аддитивно). В промежуточной области зависимость κ от температуры, числа и характера дефектов может носить весьма сложный характер.

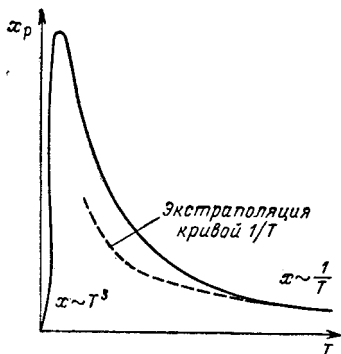


Рис. 6.13. Температурная зависимость теплопроводности решетки для идеального кристалла конечных размеров.

В заключение заметим, что для решения кинетического уравнения (6.61) для фононов наряду с методом времени релаксации широко применяются вариационные методы. Сущность их заключается в следующем.

Как упоминалось в гл. 4, в адиабатически изолированной системе в равновесии устанавливается такое распределение частиц по энергиям и пространству, которое соответствует максимуму энтропии. Это и есть распределение

Ферми для электронов, Бозе — Эйнштейна для фотонов и фононов, Максвелла — Больцмана для молекул газа и т. д.

При этом экспоненциальная зависимость вероятности заполнения данного состояния от его энергии является следствием того, что данная частица, приобретая какую-то энергию ϵ , отнимает ее у остальных $(N - 1)$ частиц, составляющих систему, и тем самым уменьшает объем, который могут занять эти частицы в многомерном фазовом пространстве, пропорционально множителю $((\mathcal{E} - \epsilon)/\mathcal{E})^{N-1}$, где \mathcal{E} — энергия всей системы. Это выражение при $N \rightarrow \infty$ и дает экспоненциальную зависимость от ϵ и от температуры $T \sim \mathcal{E}/N$.

В термодинамике необратимых процессов доказывается, что если система выведена из состояния равновесия, то в ней устанавливается такое распределение, которое обеспечивает максимальную скорость приближения к состоянию равновесия, т. е. максимальную скорость возрастания (генерации) энтропии. Это положение и положено

в основу вариационного метода определения неравновесной функции распределения фононов.

Энтропия системы определяется выражением $S = Q/T$. Следовательно, скорость возрастания энтропии \dot{S} при наличии градиента температуры и потока энергии

$$Q = \int h\omega_q w_{\text{гр}} N_q g(q) dq \quad (6.87)$$

будет выражаться следующим образом:

$$\dot{S} = Q \text{grad} \frac{1}{T} = \int h\omega_q w_{\text{гр}} N_q g(q) \text{grad} \frac{1}{T} dq. \quad (6.88)$$

Неравновесная функция распределения N_q или $n_q = N_q - N_q^0$ может быть найдена из условия, чтобы \dot{S} было максимально. Сначала из физических соображений находится вид пробной функции распределения N_q , а затем путем вариации выражения (6.88) находят значения параметров [12]. При этом точность решения зависит от того, насколько удачно выбрана пробная функция. Недостатком вариационного метода является то, что степень точности в общем не может быть оценена — всегда остается открытым вопрос, нельзя ли при другом выборе пробной функции обеспечить большую скорость роста энтропии.

6.7. ФОТОННАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

В тех случаях, когда коэффициент поглощения в области теплового излучения достаточно мал (т. е. велика длина свободного пробега фотонов), может играть существенную роль перенос тепла электромагнитным излучением.

Формулу для соответствующей теплопроводности $\kappa_{\text{ф}}$ можно вывести, если исходить из корпускулярных представлений и применить к фотонному газу формулу, выведенную для обычного классического газа:

$$\kappa_{\text{ф}} = \frac{1}{3} C_{\text{ф}} l v. \quad (6.89)$$

Подставив в (6.89) фотонную теплоемкость $C_{\text{ф}} = \frac{16h^3 T^3 \sigma_0}{c}$, скорость фотонов $v = c/n$, где c — скорость света в пустоте, n — показатель преломления и σ_0 — постоянная в законе Стефана — Больцмана, и выразив длину свободного пробега фотонов через коэффициент поглощения ($l = 1/K$),