ное изменение энергетического спектра *). Обычно критерию (7.37а) соответствуют более сильные поля или низкие температуры.

Объем и характер этой книги не позволяют остановиться более подробно на явлениях в квантующих магнитных полях; следующие разделы будут посвящены гальваномагнитным явлениям в слабых магнитных полях, а затем мы коротко остановимся на явлениях в сильных полях в классическом смысле.

Гальваномагнитные явления и соответствующие коэффициенты различают также по условиям теплообмена с окружающей средой; если теплообмен отсутствует, то коэффициенты называют адиабатическими, если образец поддерживается при постоянной температуре, то изотермическими. Мы здесь рассмотрим изотермические эффекты, так как выражения для соответствующих коэффициентов в этом случае значительно проще.

Все гальвано- и термомагнитные явления в слабых полях могут быть проанализированы строго и последовательно на основе решения кинетического уравнения с учетом магнитных членов (которые мы отбросили вначале). Мы начнем, однако, с качественного рассмотрения картины, а затем коротко воспроизведем математический анализ.

7.2. ЭФФЕКТ ХОЛЛА И ИЗМЕНЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В первой главе мы получили приближенное выражение для э. д. с. Холла, исходя из тех соображений, что в стационарных условиях «холловская сила» eE_y должна уравновешивать магнитную силу evH/c:

$$eE_y = \frac{ev_x H}{c}. \tag{7.38}$$

В действительности этот ход рассуждений неправилен по крайней мере по двум причинам:

1) равенство (7.38) не может выполняться одновременно для всех электронов, имеющих скорости, различные и по величине и по направлению;

*) Точнее, для того чтобы спектр стал дискретным, необходимо выполнение обоих условий, так как если условие (7.37) не будет выполняться, то квантованный уровень будет размываться за счет столкновений.

2) в действительности стационарное состояние наступает не тогда, когда магнитная сила уравновешивает электрическую для каждого электрона, что вообще не может быть, а тогда, когда перестает накапливаться заряд на боковых гранях образца, т. е. когда ток, создаваемый холловским полем, компенсирует ток на боковую грань, создаваемый магнитным полем. Иными словами, условием стационарности является не равенство сил, а равенство токов.

Если все электроны обладают одной и той же подвижностью, то эти условия эквивалентны *), но чем больше различие в подвижности различных групп электронов, тем сильнее различаются эти два условия. Мы рассмотрим это на простейшем примере двух групп электронов с концентрациями n_1 и n_2 и подвижностями u_1 и u_2.

Тогда ток, создаваемый первой группой электронов, $j_x^1 = en_1u_1E_x$ под действием магнитного поля отклоняется на угол $\varphi_1 = u_1H/c$ и создает составляющую по оси y:

$$j_y^1 = j_x^1\varphi_1 = \frac{eu_1^2n_1H}{c} E_x; \tag{7.39}$$

точно так же можно вычислить ток вдоль оси y, создаваемый второй группой электронов:

$$j_y^2 = j_x^2\varphi_2 = \frac{eu_2^2n_2H}{c} E_x, \tag{7.40}$$

и полный ток, создаваемый вдоль оси y холловским полем (E_y):

$$j_X = E_y e (n_1u_1 + n_2u_2). \tag{7.41}$$

В соответствии со сказанным выше, для того чтобы заряды не накапливались, необходимо выполнение условия

$$j_X = j_y^1 + j_y^2$$

---

*) Это имеет место в двух случаях: а) при простой зонной структуре и полном вырождении, при этом скорости и подвижности всех электронов на поверхности Ферми одинаковы; б) при рассеянии носителей на оптических колебаниях ионной решетки при низких температурах, при этом $r = 1/2$ и подвижность $u = (e/m) \cdot v/l \sim \sim \varepsilon^{1/2}/\varepsilon^{1/2}$ не зависит от скорости электрона. В этих двух случаях угол φ отклонения в магнитном поле для всех электронов одинаков и холловское поле может одновременно «выправить» все траектории.

или согласно (7.39), (7.40) и (7.41)

$$E_y(n_1u_1+n_2u_2)=\frac{H}{c}(u_1^2n_1+u_2^2n_2)E_x. \tag{7.42}$$

В правой и левой части выражения (7.42) могут играть основную роль различные группы электронов: «магнитный ток» [т. е. правая часть (7.42)] создается электронами, подвижность которых больше, а компенсируется теми, концентрация которых больше. Учитывая, что

$$E_x=\frac{j_x}{e(n_1u_1+n_2u_2)}, \tag{7.43}$$

из (7.42) получаем

$$E_y=\frac{j_xH}{ec}\frac{n_1u_1^2+n_2u_2^2}{(n_1u_1+n_2u_2)^2}. \tag{7.44}$$ *)

При $u_1=u_2$ выражение (7.44) совпадает с полученным без учета дисперсии:

$$E_y=j_xH\frac{1}{e(n_1+n_2)c}. \tag{7.45}$$

Чем больше различие подвижностей, тем сильнее (7.44) отличается от (7.45). При наличии двух групп носителей с сильно различающейся массой это различие (даже при полном вырождении) может быть очень велико. Если же считать, что массы всех носителей одинаковы, то в (7.44) отношение подвижностей можно заменить отношением времен релаксации:

$$E_y=\frac{j_xH}{enc}\frac{\overline{(\tau^2)}}{(\bar\tau)^2}, \tag{7.46}$$

где введены обозначения

$$\overline{\tau^2}=\frac{\Sigma\tau_i^2n_i}{\Sigma n_i},$$

и

$$\bar\tau=\frac{\Sigma\tau_in_i}{\Sigma n_i}. \tag{7.47}$$

Выражение (7.47) без труда обобщается на любое число групп носителей с различной подвижностью. Его также нетрудно обобщить на случай непрерывной зависимости времени релаксации от энергии, заменив суммы интегралами. Мы, однако, сделаем это более строго, решив

*) Если подвижность одной группы электронов много больше (например, $u_1\gg u_2$), а концентрации одного порядка, то согласно (7.44) $E_y=j_xH/en_1c$, т. е. эффект Холла будет давать концентрацию электронов, подвижность которых больше.

для этой цели кинетическое уравнение при наличии магнитного поля.

Как мы уже упоминали, слабое магнитное поле не действует на равновесную функцию распределения. Качественно это следует из того, что равновесная функция обладает шаровой симметрией, магнитная же сила перпендикулярна скорости электрона и в этом случае не меняет распределение электронов по скоростям. Количественно это выражается в том, что если мы подставим в магнитный член кинетического уравнения (5.49a) вместо f величину f_0, то он обратится в нуль:

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_{\text{дрейф магн}} = e\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} m\mathbf{v}\frac{[\mathbf{vH}]}{c} = 0.$$

Иначе обстоит дело при одновременном воздействии электрического и магнитного полей; как уже много раз упоминалось, электрическое поле смещает и деформирует функцию распределения (см. гл. 5).

Магнитное поле поворачивает эту деформированную функцию на угол

$$\varphi = \omega\tau = \frac{eH}{mc}\tau \tag{7.48}$$

и опять несколько деформирует, так как угол φ зависит от времени τ, различного для электронов с различной энергией. Мы не можем теперь ограничиться рассмотрением одномерного случая, так как у функции $f_1 = f - f_0$ будут составляющие по оси v_x и v_y; простейший вид, в котором мы ее можем искать, следовательно, будет

$$f_1 = \chi_1 v_x + \chi_2 v_y, \tag{7.49}$$

где χ_1 и χ_2 — неизвестные функции энергии.

В соответствии с (5.66)

$$-f_1 = \tau\left(\frac{\partial f}{\partial x}v_x + \frac{\partial f}{\partial y}v_y + \frac{\partial f}{\partial v_x}w_x + \frac{\partial f}{\partial v_y}w_y\right). \tag{7.50}$$

Ограничимся рассмотрением изотермических эффектов в однородных образцах, в этом случае

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{7.51}$$

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{1}{m}\left\{e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\right\}_x = \frac{e}{m}\left[E_x + \frac{1}{c}v_y H\right], \\ w_y &= \frac{1}{m}\left\{e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]\right\}_y = \frac{e}{m}\left[E_y - \frac{1}{c}v_x H\right]. \end{aligned} \tag{7.52}$$

Подставив выражения (7.49), (7.51) и (7.52) в (7.50), заменим, как мы это делали раньше, во всех членах, не содержащих магнитного поля, f на f_0 и учтем также, что $\partial f_0/\partial v_x = (\partial f_0/\partial \varepsilon)\, m v_x$, $\partial f_0/\partial v_y = (\partial f_0/\partial \varepsilon)\, m v_y$. После этого выражение (7.52) примет вид

$$-\frac{1}{\tau}(v_x\chi_1 + v_y\chi_2) = \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} eE_x v_x + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} eE_y v_y - \\ -\frac{e}{m}\frac{H}{c}\chi_2 v_x + \frac{eH}{mc}\chi_1 v_y. \qquad (7.53)$$

Равенство (7.53) должно быть тождественным, т. е. удовлетворяться при любых значениях скоростей *). Для этого коэффициенты при v_x и v_y в левой и правой части (7.53) должны быть одинаковы. Из этого условия находим

$$\chi_1 - \omega\tau\chi_2 = -\tau e E_x \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \qquad (7.54)$$

$$\chi_2 + \omega\tau\chi_1 = -\tau e E_y \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \qquad (7.55)$$

Решая совместно (7.54) и (7.55) относительно χ_1 и χ_2, после несложных преобразований получаем

$$\chi_1 = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} e\tau \frac{E_x + \varphi E_y}{1+\varphi^2}, \qquad (7.56)$$

$$\chi_2 = -\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} e\tau \frac{E_y - \varphi E_x}{1+\varphi^2}, \qquad (7.57)$$

где $\varphi = \omega\tau$.

Выражения (7.56) и (7.57) наглядно показывают, что магнитное поле поворачивает неравновесную добавку к функции распределения на угол φ и укорачивает ее в $(1+\varphi^2)$ раз (за счет сокращения эффективной длины свободного пробега).

Зная χ_1 и χ_2, можно получить f_1 и выражения для плотности токов j_x и j_y:

$$j_x = \frac{2}{h^3}\int e v_x f_1\, dg, \quad j_y = \frac{2}{h^3}\int e v_y f_1\, dg, \qquad (7.58)$$

где dg — элемент объема в пространстве импульсов, и интегрирование должно быть проведено по всему пространству.

---

*) Это следует также из того, что члены, содержащие в виде множителя v_x и v_y, перпендикулярны друг другу в пространстве скоростей.

Учитывая это, можно сразу же отбросить все члены, содержащие v_x или v_y в первой степени, так как они исчезнут при интегрировании по соответствующим импульсам в пределах от $-\infty$ до $+\infty$; учтем также, что усреднение по углам дает

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}. \tag{7.59}$$

На основании сделанных выше замечаний получим

$$j_x = \frac{2e}{h^3}\int v_x(v_x\chi_1 + v_y\chi_2)\,dg = \frac{2e}{3h^3}\int v^2\chi_1\,dg, \tag{7.60}$$

$$j_y = \frac{2e}{h^3}\int v_y(v_x\chi_1 + v_y\chi_2)\,dg = \frac{2e}{h^3}\int v^2\chi_2\,dg \tag{7.60a}$$

и, подставляя в (7.60) и (7.60а) выражения для χ_1 и χ_2, получаем

$$j_x = \frac{2}{3}\frac{e^2}{h^3}\int \frac{\tau v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(E_x + \tau\omega E_y)}{1+\omega^2\tau^2}\,dg =$$

$$= \frac{1}{3}e^2[L_1E_x + \omega L_0 E_y], \tag{7.61}$$

где введены обозначения:

$$L_1 = \frac{2}{h^3}\int \frac{\tau v^2}{1+\omega^2\tau^2}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,dg = \frac{2}{h^3}\int \frac{vl}{1+\omega^2\tau^2}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,dg \tag{7.62}$$

и

$$L_0 = \frac{2}{h^3}\int \frac{\tau^2 v^2}{1+\omega^2\tau^2}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,dg = \frac{2}{h^3}\int \frac{l^2}{1+\omega^2\tau^2}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\,dg. \tag{7.63}$$

Точно так же можно получить выражение для j_y:

$$j_y = \frac{1}{3}e^2[L_1E_y - \omega L_0 E_x]. \tag{7.64}$$

Полагая теперь $j_y = 0$, находим холловское поле:

$$E_y = \frac{\omega L_0}{L_1}E_x, \tag{7.65}$$

и, подставив E_y из (7.65) в (7.61), найдем выражение для плотности тока

$$j_x = \frac{e^2}{3}\left[\frac{L_1^2 + \omega^2 L_0^2}{L_1}\right]E_x, \tag{7.66}$$

откуда электропроводность в магнитном поле

$$\sigma(H) = \frac{j_x}{E_x} = \frac{e^2}{3}\left[\frac{L_1^2 + \omega^2 L_0^2}{L_1}\right] \tag{7.67}$$

постоянная Холла

$$R_X = \frac{E_y}{j_x H} = \frac{\omega L_0}{L_1}\frac{E_x}{H}\frac{3}{e^2}\left[\frac{L_1}{L_1^2+\omega^2 L_0^2}\right]\frac{1}{E_x} = \frac{3}{emc}\frac{L_0}{L_1^2+\omega^2 L_0^2}. \tag{7.67a}$$

Рассмотрим на основе полученных выражений частный случай: слабые поля $\varphi \ll 1$, параболическая зона и применимость статистики Максвелла.

Пренебрегая $\varphi = \omega\tau$ в знаменателе (7.62) и (7.63), полагая, как мы делали раньше,

$$l = a\varepsilon^r \quad \text{и} \quad f_0 = e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}$$

и подставляя в (7.62) и (7.63) $dg = \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi (2m)^{3/2}\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{h^3}$ получаем

$$L_1 = \frac{4a^r \pi (2m)^{3/2}}{h^3} e^{\mu^*} (kT)^{r+1}\Gamma(r+2) \tag{7.68}$$

и

$$L_0 = \frac{4a^{2r}\pi (2m)^{3/2}}{h^3}(kT)^{2r+1/2} e^{\mu^*}\Gamma\left(2r+\frac{3}{2}\right), \tag{7.69}$$

где $\Gamma(r+2)$ и $\Gamma\left(2r+\frac{3}{2}\right)$ — гамма-функции.

Напомним, что

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{при } \alpha > 0 \text{ и } n > -1, \tag{7.70}$$

при n целом и четном $(n = 2k)$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \tag{7.71}$$

при n нечетном $(n = 2k+1)$: $\Gamma(n) = (n-1)!\sqrt{\pi}$,
при любом n

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \tag{7.72}$$

и, наконец,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7.73}$$

Согласно (7.67а), (7.68) и (7.69)

$$R_X = \frac{3\sqrt{\pi}}{4enc}\frac{\Gamma\left(2r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma^2(r+2)}. \tag{7.74}$$

С помощью соотношений (7.71), (7.72), (7.73) и (7.74) нетрудно получить выражения для постоянной Холла при конкретных механизмах рассеяния, приведенных в гл. 1.

Совершенно аналогично могут быть получены из (7.66) выражения для изменения электропроводности в магнитном поле:

$$\frac{\Delta\sigma(H)}{\sigma_0}=\frac{\sigma(H)-\sigma_0}{\sigma_0}=FH^2, \tag{7.75}$$

где

$$F=R^2\sigma_0^2\left[\frac{B_r^2}{A_r^2}-1\right]; \tag{7.76}$$

$$A_r=\frac{\Gamma\left(2r+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma^2(r+2)};\quad B_r=\frac{9}{16\pi}\,\frac{\Gamma(3r+1)}{\Gamma^3(r+2)}. \tag{7.77}$$

Можно легко получить выражения, совершенно идентичные (7.57) и (7.56) для функции распределения дырок, вычислить дырочные токи j_x и j_y и затем рассмотреть собственную проводимость. При этом мы должны будем приравнять к нулю суммарный дырочный и электронный ток вдоль оси y и отсюда получить связь между E_x и E_y. Мы здесь приведем вывод, аналогичный сделанному выше, но менее строгий и более наглядный.

Ток дырок по оси x $j_p^x=epv_p=epu_pE_x$ создает соответствующий ток по оси y:

$$j_p^y=j_p^x\frac{u_pH}{c}=epu_p^2\frac{H}{c}E_x; \tag{7.78}$$

аналогично можно вычислять электронный ток:

$$j_n^y=enu_n^2\frac{H}{c}E_x. \tag{7.79}$$

Так как j_p^y и j_n^y текут в одном направлении, то результирующий ток по оси y равен их разности:

$$j_1^y=j_p^y-j_n^y=\frac{eHE_x}{c}(u_p^2p-u_n^2n). \tag{7.80}$$

Для того чтобы на одной из боковых граней не накапливались заряды, холловское поле E_y должно создать ток, равный и противоположно направленный j_1^y. Таким образом, условие стационарности будет иметь вид

$$j_1^y=E_y\sigma=E_ye(u_pp+u_nn), \tag{7.81}$$

откуда

$$E_y = \frac{H}{c} E_x \frac{(u_p^2 p - u_n^2 n)}{u_p p + u_n n}. \tag{7.81a}$$

При таких условиях полный ток на боковой поверхности образца равен нулю, так как ток дырок равен току электронов по величине, но противоположен по знаку. Нетрудно подсчитать каждый из этих токов в отдельности:

$$j_p^y = j_n^y = \frac{1}{2} \frac{eHE_x}{c} (u_p^2 p + u_n^2 n). \tag{7.82}$$

В этом случае также на одной грани будет повышенная концентрация носителей и рекомбинация будет преобладать над диссоциацией, что будет сопровождаться выделением тепла, на противоположной грани будет пониженная концентрация носителей и диссоциация будет преобладать над рекомбинацией, что вызовет поглощение тепла. Этот процесс в известной мере аналогичен биполярной диффузии при наличии градиента температур, но кардинально отличается тем, что сам создает разность температур, которая получила название эффекта Эттингсгаузена (см. следующий параграф).

Выразив E_x через j_x, получим выражение постоянной Холла:

$$R_{\text{Х}} = \frac{E_y}{j_x H} = \frac{1}{ec} \frac{u_p^2 p - u_n^2 n}{(u_p p + u_n n)^2}. \tag{7.83}$$

Более строгий расчет ~~дает выражение~~

$$R_{\text{Х}} = \frac{A}{ec} \frac{u_p^2 p - u_n^2 n}{(u_p p + u_n n)^2}. \tag{7.84}$$

Постоянная A, так же как и в случае одного знака носителей, определяется механизмом рассеяния, $A = 3\pi/8$ в атомной решетке и т. д.

Нетрудно убедиться, что: а) в случае, если $n = 0$ или $p = 0$, (7.84) переходит в (7.74) и б) если $n = p$ и $u_p = u_n$, постоянная Холла равна нулю, а следовательно, и э. д. с. Холла равна нулю.

Согласно (7.84) в области собственной проводимости знак э. д. с. Холла соответствует знаку носителей, подвижность которых больше, т. е. обычно электронов, поэтому в примесном дырочном проводнике э. д. с. Холла при переходе к собственной проводимости обычно проходит через нуль и меняет знак.

В случае смешанной проводимости выражение для электропроводности имеет вид

$$\sigma = e\,(u_p p + u_n n). \tag{7.85}$$

Как видно из (7.84) и (7.85), в этом случае одновременное измерение постоянной Холла и электропроводности не дает достаточных данных для определения подвижности и концентрации электронов и дырок, так как мы имеем два уравнения с четырьмя неизвестными. В этом случае можно выйти из положения, найдя значения подвижности дырок или электронов экстраполяцией из области примесной проводимости, а также воспользовавшись соотношением $n - p = N_d$. Задача может быть также решена, если к (7.84) и (7.85) добавить еще независимые уравнения, т. е. одновременно измерить другие эффекты.

За последние годы эффект Холла нашел широкое применение в технике: для измерения постоянных и переменных магнитных полей и «бесконтактного» измерения токов по их полям, в счетно-решающих устройствах (для умножения, деления, сложения, и вычитания, запоминающих, считывающих и записывающих устройств), для детектирования, усиления, модуляции, измерения мощности, измерения разности фаз, анализа спектров и решения множества других задач радиотехники и электротехники [29].

7.3. ЭФФЕКТ ЭТТИНГСГАУЗЕНА

Примесная проводимость. Этот случай мы рассмотрели достаточно подробно на стр. 91—92 (гл. 1). Здесь мы напомним лишь выражение для поперечного градиента температуры:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{kT}{e}\,\frac{2r-1}{2}\,\frac{R_X \sigma}{\varkappa_р + \varkappa_{эл}}\, j_x H, \tag{7.86}$$

где $\varkappa_р$ и $\varkappa_{эл}$ — соответственно теплопроводность решетки и электронного газа.

Собственная проводимость. Этот случай мы частично уже рассмотрели при анализе эффекта Холла в собственном полупроводнике. В случае собственной или смешанной проводимости, т. е. в переходной области от примесной к собственной, холловское поле вообще не образуется, если потоки дырок и электронов на боковую грань одинаковы, или образуется таким образом, чтобы уравнять