($\varepsilon \sim 10^2$). Особый интерес представляют *сегнетоэлектрики,* имеющие $\varepsilon \sim 10^4$. Для них характерно наличие областей с чрезвычайно высокими внутренними полями — *доменов.* При наложении электрических полей, превышающих некоторое критическое значение, может произойти пробой диэлектрика, в результате чего он превращается в проводник (резко растет σ).

Магнитные свойства сред также весьма разнообразны. Вещества, искажающие приложенное внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$, называются *магнетиками.* В отличие от диэлектриков здесь принято выражать внутреннее поле $\mathbf{B}$ образца через внешнее поле $\mathbf{B}_0$, т. е.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0, \tag{1.22}$$

где μ — *магнитная проницаемость* вещества (хотя по аналогии с диэлектриками более естественно было бы назвать так величину $1/\mu$). Как и (1.20), соотношение (1.22) является очень грубым приближением, верным лишь для слабых полей, и в большинстве случаев должно быть заменено более сложным.

Надо отметить, что всем веществам присущ *диамагнитный эффект,* т. е. эффект ослабления поля (для чистых *диамагнетиков* $\mu < 1$). Обусловлен он тем, что при включении внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ в веществе наводятся индукционные токи, которые по правилу Ленца ослабляют поле. Но эффект этот обычно очень слаб ($1 - \mu \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$), и на него накладываются более сильные, вызванные молекулярными токами (*парамагнетизм*). Последние всегда ориентируются по внешнему полю и усиливают его (для парамагнетиков $\mu > 1$). Для большинства веществ парамагнитный эффект тоже очень слаб ($\mu - 1 \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$) и существенно зависит от температуры. Однако имеются вещества с резко выраженной доменной структурой (*ферромагнетики*), для которых $\mu \sim 10^3$ и зависимость $\mathbf{B}$ от $\mathbf{B}_0$ сильно нелинейна. Некоторые из них сочетают ферромагнитные и диэлектрические свойства (*ферродиэлектрики*).

Особого внимания заслуживает явление *сверхпроводимости,* открытое голландским физиком *Г. Камерлинг-Оннесом* (1911). Проявляется оно при чрезвычайно низкой температуре у некоторых металлов и сплавов и состоит не только в полном исчезновении сопротивления ($\sigma = \infty$), но и в выталкивании из образцов магнитного поля (*эффект Мейсснера*). Тем самым сверхпроводник ведет себя как идеальный диамагнетик ($\mathbf{B} = 0$ эквивалентно $\mu = 0$). Удивительные свойства сверхпроводников получили объяснение лишь совсем недавно (1957).

§ 2. УСЛОВИЕ МАКРОСКОПИЧНОСТИ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Ознакомившись с основными опытными фактами, лежащими в основе электродинамики, их необходимо, следуя индуктивному методу, сопоставить друг с другом, проверить взаимную согласованность и установить минимальный набор фундаментальных уравнений, из которых следуют все остальные. По существу, именно это и было сделано *Дж. К. Максвеллом* (1864).

Но сначала обратим внимание на то, что все опыты проводились с *макроскопическими телами,* т. е. с телами, содержащими большое число заряженных частиц ($N \sim 10^{23}$). Поэтому и уравнения, которые могут быть выведены из этих опытов, тоже должны быть макроскопическими. Чтобы приспособить к новым условиям уже известный математический аппарат, проще всего положить в его основу понятие *физически бесконечно малого объема* ΔV. Под последним обычно понимается объем, достаточно малый по сравнению с объемом V макроскопического объекта, но вместе с тем содержащий достаточно много частиц, чтобы отношения типа $\Delta Q/\Delta V$, где $\Delta Q = \sum_{i \in \Delta V} e_i$ — полный заряд внутри ΔV, мало менялись при изменении ΔV. Последнее означает, что характерный размер $\Delta V^{1/3}$ намного превосходит среднее расстояние между частицами l. Если ввести характерный размер макроскопического объекта ($L \equiv V^{1/3}$),то станет ясно, что

$$l^3 \ll \Delta V \ll L^3. \tag{2.1}$$

В дальнейшем, называя теорию *макроскопической,* мы будем подразумевать, что так введенный масштаб $\Delta V^{1/3}$ является в ней минимально возможным, т. е. все рассматриваемые расстояния Δx превосходят его: $\Delta x \geqslant \Delta V^{1/3}$.

В макроскопической теории отношение $\Delta Q/\Delta V$ является вполне определенной функцией точки $\mathbf{r}$ (которую естественно считать центром области ΔV) и называется *плотностью электрического заряда* ρ (макроскопической). Таким образом,

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i. \tag{2.2}$$

При этом заряд в произвольной области V равен

$$Q(t) = \int_V \rho(t, \mathbf{r})\, \mathrm{d}V. \tag{2.3}$$

Введем теперь еще одно важное понятие — *плотности электрического тока* $\mathbf{j}$. Для этого рассмотрим площадку ΔS с нормалью $\mathbf{n}$ (рис. 2.1) и подсчитаем заряд ΔQ, пересекший ее за промежуток времени Δt. Выделим сначала заряды e_i, имеющие скорости $\mathbf{v}_i$, лежащие в некотором интервале $I_\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}/2,\ \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}/2)$ со средней скоростью $\mathbf{v}$. Тогда все такие заряды, находящиеся в призме с высотой $(\mathbf{nv})\Delta t$ и основанием ΔS, пройдут за время Δt через площадку ΔS. Учитывая, что плотность выделенных

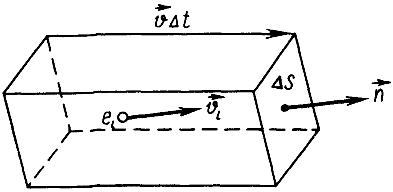

Рис. 2.1

электрических зарядов равна

$$\rho_v = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\left\{ \substack{i \in \Delta V \\ v_i \in I_v} \right\}} e_i,$$

находим заряд, пересекший площадку ΔS за отрезок времени Δt со средней скоростью $\mathbf{v}$:

$$\Delta Q_v = (\mathbf{nv}) \Delta t\, \Delta S \rho_v = \frac{\Delta t\, \Delta S}{\Delta V} \sum_{\left\{ \substack{i \in \Delta V \\ v_i \in I_v} \right\}} (\mathbf{nv}) e_i.$$

Теперь, чтобы найти полный заряд ΔQ, достаточно лишь просуммировать ΔQ_v по всем возможным интервалам I_v:

$$\Delta Q = \frac{\Delta t\, \Delta S}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{nv}_i) e_i \equiv (\mathbf{nj}) \Delta t\, \Delta S, \tag{2.4}$$

где введена плотность электрического тока

$$\mathbf{j} \equiv \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \mathbf{v}_i. \tag{2.5}$$

Из (2.4) сила тока сквозь поверхность S равна

$$I = \int_S (\mathbf{nj})\, \mathrm{d}S. \tag{2.6}$$

Запишем теперь закон сохранения электрического заряда (1.2) для некоторого объема V, окруженного замкнутой поверхностью S (рис. 2.2). В этом случае (2.6) и теорема Гаусса—Остроградского дают

$$I = \oint_S (\mathbf{nj})\, \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}\, \mathrm{d}V.$$

В предположении, что поверхность S не изменяется со временем, (1.2) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho\, \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{j}\, \mathrm{d}V.$$

Так как объем V выбран произвольно, то

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{2.7}$$

(*закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме*).

Задача 2.1. *Показать, что при бесконечно малом смещении зарядов на вектор* $\delta \mathbf{r}$ *их плотность* ρ *изменяется на*

$$\delta \rho = -\operatorname{div}(\rho \delta \mathbf{r}). \tag{2.8}$$

Мы уже говорили о делении зарядов на *связанные* и *свободные*. Сохраняя обозначения ρ и $\mathbf{j}$ для плотностей свободных зарядов и токов, полные плотности, очевидно, можно представить в виде

$$\rho^{\text{полн}}=\rho+\rho^{\text{связ}}, \quad \mathbf{j}^{\text{полн}}=\mathbf{j}+\mathbf{j}^{\text{связ}}. \tag{2.9}$$

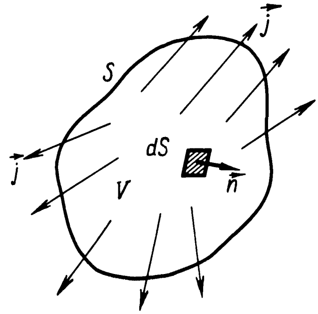

Рис. 2.2

Иногда* встречается несколько иное деление зарядов: на *собственные* (принадлежащие веществу) и *внесенные* (или сторонние), причем первые удовлетворяют условию нейтральности среды

$$Q^{\text{соб}}=\int\limits_V \rho^{\text{соб}} \mathrm{d}V=0,$$

где интеграл берется по всему объему вещества. Мы, однако, не будем отличать собственные заряды от связанных, т. е. будем полагать $\rho^{\text{соб}}\equiv\rho^{\text{связ}}$, хотя такое отличие иногда бывает существенным (например, при описании ионизованной среды — плазмы). Если же связанные заряды не удовлетворяют *условию нейтральности*

$$\int\limits_V \rho^{\text{связ}} \mathrm{d}V=0, \tag{2.10}$$

то избыточный заряд можно условно объявить свободным.

В большинстве электродинамических задач предполагается, что закон сохранения имеет место как для свободных, так и для связанных зарядов в отдельности, т. е. исключаются процессы перехода связанных зарядов в свободные и обратно. Поэтому разумно принять, что

$$\partial\rho^{\text{полн}}/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{полн}}=0, \tag{2.11а}$$
$$\partial\rho^{\text{связ}}/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{j}^{\text{связ}}=0. \tag{2.11б}$$

Задача 2.2. *Показать, что из условия нейтральности* (2.10) *и закона сохранения связанного заряда* (2.11б) *вытекает следующее представление для связанных зарядов и токов:*

$$\rho^{\text{связ}}=-\operatorname{div}\mathbf{P}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{j}^{\text{связ}}=\partial\mathbf{P}/\partial t+c\operatorname{rot}\mathbf{M}, \tag{2.13}$$

где введенные поляризованность **P** *и намагниченность* **M** *исчезают вне вещества**. Выразить через* **P** *и* **M** *дипольный* **p** *и магнитный* **m** *моменты образца, определяемые следующим образом:*

$$\mathbf{p}\equiv\int\limits_V \rho^{\text{связ}}\mathbf{r}\,\mathrm{d}V, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{m}\equiv\frac{1}{2c}\int\limits_V [\mathbf{r}\mathbf{j}^{\text{связ}}]\,\mathrm{d}V. \tag{2.15}$$

---

* См.: *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М. 1982, Гл. 2.

** Физический смысл векторов **P** и **M** будет выяснен в § 7, 8.

В дальнейшем мы изучим сначала наиболее простой случай, допустив, что распределение зарядов и токов задано, т. е. $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$ суть известные функции t и $\mathbf{r}$. Поскольку здесь не выделяются связанные заряды, этот случай эквивалентен электромагнитному полю в вакууме. В последующем мы максимально приблизим задачу к реальной, приняв, что известно лишь распределение свободных зарядов и токов, т. е. ρ и $\mathbf{j}$. Этот случай является наиболее общим и соответствует рассмотрению электромагнитного поля в веществе.

§ 3. ЗАКОН КУЛОНА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим совокупность точечных зарядов e_i, помещенных в точках $\mathbf{r}_i$. По закону Кулона, каждый из зарядов e_i создает в окружающем пространстве электрическое поле

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = e_i \mathbf{R}_i / R_i^3, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{R}_i \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Согласно принципу суперпозиции, полная напряженность поля равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i. \tag{3.2}$$

Для перехода к макроскопическому описанию разобьем все пространство на ячейки $\Delta V_k'$ с центрами $\mathbf{r}_k'$ и перепишем (3.2) в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k \sum_{i \in \Delta V_k'} \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i.$$

С другой стороны [см. (2.1)], $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i \approx \mathbf{r} - \mathbf{r}_k' \equiv \mathbf{R}_k'$, и поэтому, вводя, согласно (2.2), макроскопическую плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$, найдем

$$\sum_{i \in \Delta V_k'} \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i \approx \frac{\mathbf{R}_k'}{(R_k')^3} \sum_{i \in \Delta V_k'} e_i = \frac{\mathbf{R}_k'}{(R_k')^3} \rho(\mathbf{r}_k') \Delta V_k'.$$

Заменив суммирование по ячейкам $\Delta V_k'$ объемным интегралом, вместо (3.2) получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R^3} \mathbf{R} \, dV', \tag{3.3}$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Выражения (3.2) и (3.3) являются исходными для установления одного из важнейших уравнений электродинамики, которому подчиняется *электрическое поле* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Рассматривая $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ как объективную реальность, мы как бы забываем о силовом происхождении $\mathbf{E}$, о лежащем в основе (3.2) законе Кулона.