В дальнейшем мы изучим сначала наиболее простой случай, допустив, что распределение зарядов и токов задано, т. е. $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$ суть известные функции t и $\mathbf{r}$. Поскольку здесь не выделяются связанные заряды, этот случай эквивалентен электромагнитному полю в вакууме. В последующем мы максимально приблизим задачу к реальной, приняв, что известно лишь распределение свободных зарядов и токов, т. е. ρ и $\mathbf{j}$. Этот случай является наиболее общим и соответствует рассмотрению электромагнитного поля в веществе.

§ 3. ЗАКОН КУЛОНА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим совокупность точечных зарядов e_i, помещенных в точках $\mathbf{r}_i$. По закону Кулона, каждый из зарядов e_i создает в окружающем пространстве электрическое поле

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = e_i \mathbf{R}_i / R_i^3, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{R}_i \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Согласно принципу суперпозиции, полная напряженность поля равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i = \sum_i \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i. \tag{3.2}$$

Для перехода к макроскопическому описанию разобьем все пространство на ячейки $\Delta V'_k$ с центрами $\mathbf{r}'_k$ и перепишем (3.2) в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k \sum_{i \in \Delta V'_k} \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i.$$

С другой стороны [см. (2.1)], $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i \approx \mathbf{r} - \mathbf{r}'_k \equiv \mathbf{R}'_k$, и поэтому, вводя, согласно (2.2), макроскопическую плотность заряда $\rho(\mathbf{r})$, найдем

$$\sum_{i \in \Delta V'_k} \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i \approx \frac{\mathbf{R}'_k}{(R'_k)^3} \sum_{i \in \Delta V'_k} e_i = \frac{\mathbf{R}'_k}{(R'_k)^3} \rho(\mathbf{r}'_k) \Delta V'_k.$$

Заменив суммирование по ячейкам $\Delta V'_k$ объемным интегралом, вместо (3.2) получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R^3} \mathbf{R} \, \mathrm{d}V', \tag{3.3}$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Выражения (3.2) и (3.3) являются исходными для установления одного из важнейших уравнений электродинамики, которому подчиняется *электрическое поле* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Рассматривая $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ как объективную реальность, мы как бы забываем о силовом происхождении $\mathbf{E}$, о лежащем в основе (3.2) законе Кулона.

Принимая полевую гипотезу, мы предполагаем объективное существование в окружающем пространстве физической величины $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ независимо от того, помещается ли в точку $\mathbf{r}$ пробный заряд или нет.

Подсчитаем поток поля $\mathbf{E}_i$ сквозь замкнутую поверхность (рис. 3.1):

$$N_i = \oint_S (\mathbf{n}\mathbf{E}_i)\,\mathrm{d}S.$$

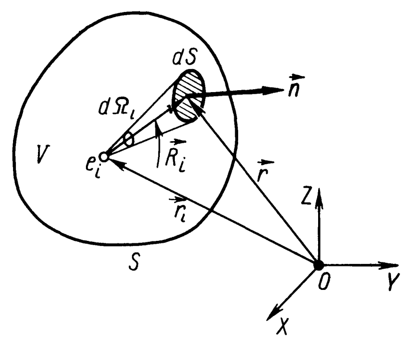

Рис. 3.1

Вводя телесный угол

$$\mathrm{d}\Omega_i = \mathrm{d}S\,(\mathbf{n}\mathbf{R}_i)\,R_i^{-3},$$

под которым виден элемент поверхности $\mathrm{d}S$ из точки $\mathbf{r}_i$, заключаем, что

$$N_i = e_i \oint_S \mathrm{d}\Omega_i = \begin{cases} 4\pi e_i & \text{при } \mathbf{r}_i \in V, \\ 0 & \text{при } \mathbf{r}_i \overline{\in} V, \end{cases}$$

где V — объем, заключенный внутри S. Поэтому поток полного поля

$$N = \oint_S (\mathbf{n}\mathbf{E})\,\mathrm{d}S = \sum_i N_i = 4\pi \sum_{i\in V} e_i \equiv 4\pi Q,$$

где Q — заключенный внутри поверхности S заряд.

Используя макроскопическое представление о распределенном заряде, получаем

$$\oint_S (\mathbf{n}\mathbf{E})\,\mathrm{d}S = 4\pi \int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{3.4}$$

(*теорема Гаусса* в интегральной форме).

Применяя теорему Гаусса — Остроградского

$$\oint_S (\mathbf{n}\mathbf{E})\,\mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V$$

и учитывая, что объем V произволен, приходим к дифференциальной форме теоремы Гаусса:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{3.5}$$

Будем считать это уравнение справедливым для электромагнитного поля независимо от границ применимости закона Кулона, *т. е. не только для статического, но и для зависящего от времени поля* **E**.

Выясним теперь, не противоречит ли (3.5) уравнению (3.3). Решение этой задачи, как и многих других, значительно облегчается, если использовать введенную английским физиком *П. А. М. Дираком* δ-функцию $\delta(x)$.

Это *обобщенная функция**, т. е. нельзя говорить о каких-либо ее значениях, определены лишь интегралы от ее произведения с какой-либо достаточно «хорошей» (например, непрерывной) функцией $f(x)$. При этом для любого $\varepsilon>0$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x=f(0). \qquad (3.6)$$

Трехмерная δ-функция определяется с помощью аналогичного равенства

$$\int_{V_\varepsilon} f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V=f(0), \qquad (3.7)$$

где $\mathbf{r}=0\in V_\varepsilon$.

В связи с анализом свойств δ-функции здесь уместно привести определение δ-функции, данное *Л. Эйлером*. В своей классической работе «Метод нахождения кривых линий ...», посвященной решению изопериметрической задачи, он приходит к следующей формуле для вариации функционала $I[y(x)]$ в окрестности некоторой точки x^0:

$$\delta I=\delta\int Z(y,\ y')\,\mathrm{d}x=\int\delta y(x-x^0)\left[Z'_y-(Z'_{y'})'_x\right]\mathrm{d}x,$$

где $\delta y(x-x^0)$ — «треугольная» функция, график которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием $\mathrm{d}x$ и высотой $a/\mathrm{d}x$, восставленной в точке x^0.

Полагая в пределе $\mathrm{d}x\to 0$, Эйлер из условия $\delta I=0$ выводит свое знаменитое вариационное уравнение $Z'_y=(Z'_{y'})'_x$. Нетрудно видеть, что при этом «треугольная» функция переходит в δ-функцию, т. е.

$$\lim_{\mathrm{d}x\to 0}\frac{2}{a}\delta y(x-x^0)=\delta(x-x^0).$$

Задача 3.1. *Выразить* $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ и $\delta(\mathbf{r})$ *через одномерные δ-функции в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.*

Задача 3.2. *Показать, что если функция* $\varphi(x)$ *имеет набор однократных нулей* $\{x_i\}$, *то*

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_i\frac{\delta(x-x_i)}{|\varphi'(x_i)|}. \qquad (3.8)$$

Задача 3.3. *Показать, что справедливо следующее представление для δ-функции*:

$$\delta(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)=-\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r}\right); \qquad (3.9)$$

---

* Истоки теории обобщенных функций относятся к работам Эйлера, Коши и Пуассона по расходящимся интегралам. Однако строгая теория обобщенных функций была создана лишь в нашем веке трудами *Н. М. Гюнтера* (1924), *С. Л. Соболева* (1936) и *Л. Шварца* (1946), двухтомная монография которого «Теория распределений» (1950—1951) подытоживает все эти исследования.

его физически можно интерпретировать как плотность точечного заряда. Убедиться с его помощью, что (3.3) *является решением уравнения* (3.5), *удовлетворяющим условию потенциальности*

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0. \tag{3.10}$$

Задача 3.4. *Сфера радиуса* a *заряжена равномерно зарядом* Q. *Найти напряженность* $\mathbf{E}$ *поля вне сферы, внутри нее и на ее поверхности.*

§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Для получения основного уравнения, которому подчиняется индукция магнитного поля, порождаемого постоянными токами $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, воспользуемся законом Ампера (1.11). Запишем его с учетом (2.6):

$$\oint\limits_C (\mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{l})=\frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\mathbf{nj})\,\mathrm{d}S, \tag{4.1}$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на контур C. Применяя теорему Стокса, находим

$$\int\limits_S (\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{B})\,\mathrm{d}S=\frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\mathbf{nj})\,\mathrm{d}S.$$

Так как поверхность S произвольна, то

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=4\pi\mathbf{j}/c \tag{4.2}$$

(*закон Ампера в дифференциальной форме*).

Так как закон Ампера является следствием закона Био — Савара — Лапласа (см. задачу **1.5**), то, очевидно, последний как раз и дает готовое решение уравнения (4.2). В самом деле, согласно (2.4),

$$I\mathrm{d}\mathbf{l}=\mathbf{j}\mathrm{d}V. \tag{4.3}$$

Поэтому если элемент тока $I\mathrm{d}\mathbf{l}$ помещен в точке $\mathbf{r}'$, то вместо (1.8) имеем

$$\mathrm{d}\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\mathrm{d}V'\,[\mathbf{j}'\mathbf{R}]\,R^{-3}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{R}\equiv\mathbf{r}-\mathbf{r}'$; $\mathbf{j}'\equiv\mathbf{j}(\mathbf{r}')$.

Интегрируя (4.4) по всем распределенным токам, находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int[\mathbf{j}'\mathbf{R}]\,\frac{\mathrm{d}V'}{R^3}. \tag{4.5}$$

Задача 4.1. *Показать, что* (4.5) *есть решение* (4.2), *удовлетворяющее условию соленоидальности*

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{4.6}$$