

его физически можно интерпретировать как плотность точечного заряда. Убедиться с его помощью, что (3.3) является решением уравнения (3.5), удовлетворяющим условию потенциальности

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (3.10)$$

Задача 3.4. Сфера радиуса a заряжена равномерно зарядом Q . Найти напряженность \mathbf{E} поля вне сферы, внутри нее и на ее поверхности.

§ 4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Для получения основного уравнения, которому подчиняется индукция магнитного поля, порождаемого постоянными токами $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, воспользуемся законом Ампера (1.11). Запишем его с учетом (2.6):

$$\oint_C (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS, \quad (4.1)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на контур C . Применяя теорему Стокса, находим

$$\int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{B}) dS = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS.$$

Так как поверхность S произвольна, то

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j} / c \quad (4.2)$$

(закон Ампера в дифференциальной форме).

Так как закон Ампера является следствием закона Био — Савара — Лапласа (см. задачу 1.5), то, очевидно, последний как раз и дает готовое решение уравнения (4.2). В самом деле, согласно (2.4),

$$I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV. \quad (4.3)$$

Поэтому если элемент тока $I d\mathbf{l}$ помещен в точке \mathbf{r}' , то вместо (1.8) имеем

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} dV' [\mathbf{j}' \mathbf{R}] R^{-3}, \quad (4.4)$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; $\mathbf{j}' \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}')$.

Интегрируя (4.4) по всем распределенным токам, находим

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int [\mathbf{j}' \mathbf{R}] \frac{dV'}{R^3}. \quad (4.5)$$

Задача 4.1. Показать, что (4.5) есть решение (4.2), удовлетворяющее условию соленоидальности

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Согласно (4.6), магнитные заряды в свободном виде не существуют. В самом деле, взаимодействия электрических и магнитных зарядов тождественны. Поэтому можно применить теорему Гаусса (3.4) и к магнитному полю. Тогда магнитный поток Φ сквозь замкнутую поверхность S с учетом (1.7) равен

$$\Phi = \int_S (\mathbf{nB}) dS = 4\pi \sum_{i \in V} m_i = 0. \quad (4.7)$$

Отсюда по аналогии с (3.5) следует (4.6).

Из уравнения (4.7), выражающего факт неразделимости магнитных зарядов противоположных знаков, вытекает, что магнитные силовые линии всегда замкнуты. В связи с этим можно считать (4.6) справедливым не только для статических, но и для зависящих от времени магнитных полей \mathbf{B} . Что же касается закона Ампера (4.2), то (см. § 6) он нуждается в дальнейшем обобщении на нестационарный случай.

§ 5. ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ФАРАДЕЯ

Найдем теперь дифференциальную форму закона электромагнитной индукции Фарадея. Для этого воспользуемся формулировкой Максвелла (1.17) и ограничимся случаем неподвижных контуров (как учесть движение контура, мы установим в § 50). Так как, по определению, э. д. с. индукции в контуре C равна

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E} d\mathbf{l}), \quad (5.1)$$

то, применяя теорему Стокса, преобразуем (1.17) к виду

$$\oint_C (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = \int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{E}) dS = -\frac{1}{c} \int_S \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS, \quad (5.2)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на контур C . Ввиду произвольности S из (5.2) следует, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

(дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея).

Согласно (5.3), переменное магнитное поле \mathbf{B} порождает в каждой точке пространства вихревое электрическое поле \mathbf{E} (рис. 5.1) с отличной от нуля циркуляцией (5.1) (в проти-

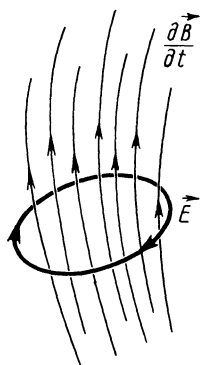


Рис. 5.1