что позволяет интерпретировать ее как среднюю (макроскопическую) плотность дипольного момента вещества. Заметим, что только на основании условия нейтральности (2.10) дать такую интерпретацию вектору **P** еще было нельзя (см. задачу **2.2**).

Очевидно, что электрическое поле **E** создается как свободными, так и связанными зарядами. Поэтому внутри диэлектрика уравнение (3.5) должно быть записано в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi(\rho+\rho_P),$$

или с учетом (7.1)

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P})=4\pi\rho.$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{D}\equiv\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}, \tag{7.6}$$

получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho, \tag{7.7}$$

где **D** — *электрическая индукция*. Она может быть интерпретирована как напряженность электрического поля, которое создавали бы свободные заряды плотностью ρ в вакууме.

В общем случае поляризованность **P** может очень сложно зависеть от напряженности **E** поля. Однако для большинства диэлектриков при не слишком большой напряженности эта зависимость линейная. В самом простом случае изотропного диэлектрика

$$\mathbf{P}=\varkappa\mathbf{E}, \tag{7.8}$$

где $\varkappa$ — *коэффициент поляризации вещества*, или *диэлектрическая восприимчивость*. С учетом (7.8)

$$\mathbf{D}=(1+4\pi\varkappa)\mathbf{E}\equiv\varepsilon\mathbf{E}, \tag{7.9}$$

где $\varepsilon=1+4\pi\varkappa$ — диэлектрическая проницаемость. Нетрудно видеть, что это определение ε согласуется с (1.20). В самом деле, для всех простейших диэлектриков $\varkappa>0$. Поэтому $\varepsilon>1$ и $D>E$. Согласно (7.7), поле **D**, создаваемое точечным зарядом e, совпадает с полем **E**, создаваемым тем же зарядом в вакууме [см. (1.4)]. Следовательно, напряженность поля, создаваемого зарядом e в диэлектрике, в ε раз меньше напряженности поля, создаваемого тем же зарядом в вакууме. Поэтому закон Кулона в диэлектрической среде имеет вид

$$\mathbf{F}^{(e)}_{12}=e_1e_2\mathbf{r}/(\varepsilon r^3). \tag{7.10}$$

§ 8. МАГНЕТИКИ. НАМАГНИЧЕННОСТЬ

Магнетик, или намагничивающуюся среду, удобно описывать как совокупность элементарных внутримолекулярных токов

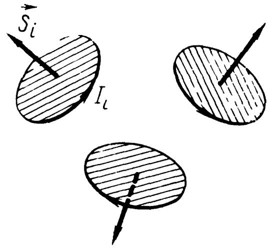

Рис. 8.1

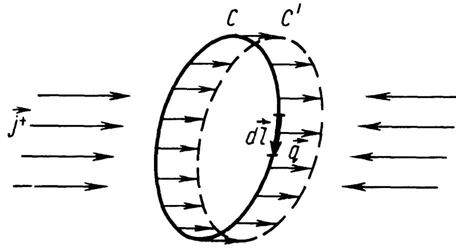

Рис. 8.2

(гипотеза Ампера), часто называемых *токами намагничения**. Так как каждый молекулярный ток замкнут, то эффективно его можно представить в виде линейного тока I_i, охватывающего некоторую площадку S_i (рис. 8.1) с геометрическим моментом

$$\mathbf{S}_i = \int\limits_{S_i} \mathbf{n} \mathrm{d}S.$$

В таком случае магнитный момент молекулярного тока I_i, по определению, равен

$$\mathbf{m}_i = I_i \mathbf{S}_i / c. \tag{8.1}$$

Задача 8.1. *Показать, что формула* (8.1) *согласуется с определением магнитного момента* (2.15).

Макроскопически каждую точку магнетика можно характеризовать *намагниченностью*

$$\mathbf{M} \equiv \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{m}_i = \frac{1}{c \Delta V} \sum_{i \in \Delta V} I_i \mathbf{S}_i, \tag{8.2}$$

равной, очевидно, средней плотности магнитного момента в среде. Для выяснения роли, которую играет этот вектор в описании магнетиков, удобно воспользоваться моделью двух сред. Иначе говоря, по аналогии с диэлектриком будем рассматривать магнетик как наложение противоположно направленных распределенных токов $\mathbf{j}^+$ и $\mathbf{j}^-$, компенсирующих друг друга при отсутствии намагничения. Эти токи можно представить себе в виде стационарных потоков двух сред, заряженных соответственно положительно и отрицательно. При намагничивании (например, под влиянием внешнего поля $\mathbf{B}_0$) токи $\mathbf{j}^+$ и $\mathbf{j}^-$ сместятся в каждой точке друг относительно друга на некоторый вектор $\mathbf{q}$, в результате чего появится полный ток I через поверхность S, натянутую на некоторый контур C.

---

* Эти токи обусловлены как движением электронов вокруг ядер в атомах, так и собственным вращением электронов (*спиновый магнетизм*).

В самом деле, элемент $\mathbf{dl}$ контура C опишет при смещении на вектор $\mathbf{q}$ площадку $\mathbf{n}\mathrm{d}S=[\mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{l}]$ (рис. 8.2). Но $|\mathbf{q}|$ имеет порядок размера молекулы и в макроскопической теории может считаться бесконечно малым. Поэтому убыль потока $\mathbf{j}^+$ через S, которая и определяет ток I, равна

$$I=-\oint_C (\mathbf{j}^+[\mathbf{q}\mathrm{d}\mathbf{l}]). \tag{8.3}$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, приведем (8.3) к виду

$$I=\int_S (\mathbf{n}\mathbf{j}_\mathrm{M})\,\mathrm{d}S,$$

где

$$\mathbf{j}_\mathrm{M}\equiv \operatorname{rot}[\mathbf{q}\mathbf{j}^+] \tag{8.4}$$

— *плотность тока намагничения.* Пользуясь модельной формулой (8.4), можно уже сравнительно просто показать, что

$$\mathbf{j}_\mathrm{M}=c\operatorname{rot}\mathbf{M}. \tag{8.5}$$

Для этого по аналогии с представлением

$$\mathbf{j}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i\mathbf{v}_i=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\int_{\Delta V} e_i\mathbf{v}_i\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_i)\,\mathrm{d}V'$$

введем сначала плотность $\mathbf{j}_i$ молекулярных токов, т. е. положим

$$\mathbf{j}\equiv\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\int_{\Delta V}\mathbf{j}_i\,\mathrm{d}V'.$$

После этого введем смещения $\mathbf{q}_i$ «положительных» молекулярных токов с плотностью $\mathbf{j}_i^+$ относительно «отрицательных» $\mathbf{j}_i^-$ и применим (8.4) для вычисления $\mathbf{j}_\mathrm{M}$. Тогда $\mathbf{M}$ в (8.5) имеет вид (с точностью до градиента произвольного скаляра)

$$\mathbf{M}=\frac{1}{c\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\int_{\Delta V}[\mathbf{q}_i\mathbf{j}_i^+]\,\mathrm{d}V',$$

или [см. (4.3)]

$$\mathbf{M}=\frac{1}{c\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} I_i^+\oint_{C_i^+}[\mathbf{q}_i\mathrm{d}\mathbf{l}]. \tag{8.6}$$

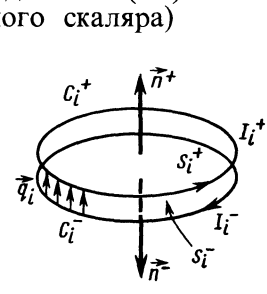

Рис. 8.3

Предположим, что контур C_i^+ получается смещением из C_i^- (рис. 8.3). Тогда, поскольку геометрический момент замкнутой поверхности равен нулю, т. е.

$$\oint_S \mathbf{n}\,\mathrm{d}S=0,$$

находим

$$\oint_{C_i^+}[\mathbf{q}_i\mathrm{d}\mathbf{l}]=\int_{S_i^+}\mathbf{n}_i^+\mathrm{d}S+\int_{S_i}\mathbf{n}_i^-\mathrm{d}S\equiv\mathbf{S}_i^++\mathbf{S}_i^-.$$

Поэтому (8.6) с учетом равенства $I_i^+=I_i^-\equiv I_i$ примет вид

$$\mathbf{M}=\frac{1}{c\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}I_i^+\left(\mathbf{S}_i^++\mathbf{S}_i^-\right)\equiv\frac{1}{c\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}I_i\mathbf{S}_i,$$

что совпадает с (8.2).

Задача 8.2. *Показать, что плотность тока намагничения* (8.5) *не дает вклада в полный ток через какое-либо сечение образца.*

§ 9. УЧЕТ ТОКОВ НАМАГНИЧЕНИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИИ

Если воспользоваться представлением (2.13) для плотности связанных токов $\mathbf{j}^{\text{связ}}$, то видно, что

$$\mathbf{j}^{\text{связ}}=\mathbf{j}_\text{P}+\mathbf{j}_\text{M},\tag{9.1}$$

где $\mathbf{j}_\text{M}=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$ — плотность тока намагничения, а $\mathbf{j}_\text{P}$ — дополнительная плотность тока, названная *плотностью тока поляризации*:

$$\mathbf{j}_\text{P}=\partial\mathbf{P}/\partial t.\tag{9.2}$$

Физический смысл этого тока проясняется, если воспользоваться представлением (7.5) для вектора $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{j}_\text{P}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}e_i^+\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}_i}{\mathrm{d}t}.$$

Очевидно, что плотность $\mathbf{j}_\text{P}$ тока связана с изменением относительного расположения зарядов в молекулах, чем и обусловлено ее название.

Если имеется намагниченная и поляризованная среда, то в уравнении (6.3), содержащем плотность тока $\mathbf{j}_\text{полн}$, необходимо учесть токи намагничения и поляризации. Очевидно, это уравнение следует записать в виде

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}+\mathbf{j}_\text{P}+\mathbf{j}_\text{M}\right).$$