причем

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}, \tag{10.2}$$

где **P** и **M** зависят от **E** и **B**.

Для простейшего, но широко распространенного класса диэлектриков и магнетиков **P** и **M** пропорциональны **E** и **B**. Для таких веществ

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}, \tag{10.3}$$

где ε и μ, вообще говоря, суть функции координат и времени.

Система уравнений (10.1), (10.3) является уравнениями Максвелла в том виде, как они первоначально были сформулированы. Решая эту систему при заданных ρ, $\mathbf{j}$ и ε, μ, можно определить **E**, **D**, **B** и **H**. В интегральной форме эта система переписывается так:

$$\begin{gathered}\oint_C(\mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S(\mathbf{n}\mathbf{D})\,\mathrm{d}S=\frac{4\pi}{c}\int_S(\mathbf{n}\mathbf{j})\,\mathrm{d}S,\\ \oint_C(\mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l})+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S(\mathbf{n}\mathbf{B})\,\mathrm{d}S=0,\\ \oint_S(\mathbf{n}\mathbf{D})\,\mathrm{d}S=4\pi\int_V\rho\,\mathrm{d}V, \quad \oint_S(\mathbf{n}\mathbf{B})\,\mathrm{d}S=0,\end{gathered} \tag{10.4}$$

причем правоориентированная поверхность S, натянутая на контур C, считается не зависящей от времени.

§ 11. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В макроскопической физике и в инженерной электро- и радиотехнической практике токи создаются в проводниках под действием поля **E** и *сторонних э. д. с.*, характеризуемых некоторой напряженностью $\mathbf{E}^{\text{стор}}$. Сторонними называются силы, отличные от сил, действующих на заряды в электромагнитном поле, но способные перемещать заряды и создавать токи. Сторонние силы могут быть химического, диффузионного, механического и другого происхождения. Возникают они при наличии градиента плотности, температуры и вследствие других факторов. Сторонние силы действуют, например, в гальванических элементах, аккумуляторах, термопарах и т. п.

В широком классе проводников сила тока I пропорциональна напряжению U_{12}, т. е. справедлив линейный закон Ома (1.18). Однако при наличии сторонних э. д. с. этот закон должен быть обобщен и заменен *законом Кирхгофа* для участка цепи*:

$$IR_{12}=U_{12}+\mathscr{E}_{12}, \tag{11.1}$$

---

* Как и в (10.4), проводник в (11.1) считается неподвижным.

где, по аналогии с (1.19),

$$U_{12}=\int_1^2(\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l}),\quad \mathscr{E}_{12}=\int_1^2(\mathbf{E}^{\text{стор}}\mathrm{d}\mathbf{l}). \qquad (11.2)$$

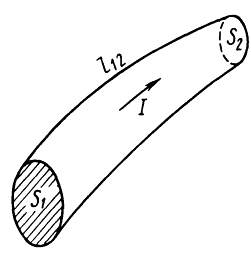

Рис. 11.1

При вычислении интегралов в (11.2) предполагается, что они мало меняются при изменении положений точек *1*, *2*, взятых где-то на поперечных сечениях проводника $S_{1,2}$ (рис. 11.1). Поэтому закон (11.1) справедлив только для *квазилинейных проводников*, для которых можно пренебречь поперечными размерами по сравнению с продольными, т. е. $\sqrt{S_{1,2}} \ll l_{12}$. Тогда, выбрав бесконечно малый участок проводника l_{12}, имеем

$$I=\int_S(\mathbf{n}\mathbf{j})\,\mathrm{d}S\approx(\mathbf{n}\mathbf{j})\,S.$$

Так как $\mathbf{j}\parallel\mathbf{n}\parallel\mathrm{d}\mathbf{l}$, то из (11.1) и (11.2) выводим, что

$$\mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}}\right) \qquad (11.3)$$

(*дифференциальный закон Ома*).

Здесь мы воспользовались определением электропроводимости σ, согласно которому для цилиндрических проводников $R_{12}=l_{12}/(\sigma S)$. В случае анизотропных сред вместо σ следует писать тензор электропроводимости $\hat{\sigma}$, т. е. полагать

$$j^i=\sigma^{ik}\left(E_k+E_k^{\text{стор}}\right). \qquad (11.4)$$

Следует отметить, что, хотя закон Кирхгофа (11.1) верен лишь для стационарных токов, не зависящих от времени, соотношение (11.3) часто обобщают и на нестационарный случай.

Задача 11.1. *Показать, что для квазилинейных проводников сопротивление участка может быть вычислено по формуле*

$$R_{12}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}l}{\sigma(\mathbf{r})\,S(\mathbf{r})}, \qquad (11.5)$$

где $S(\mathbf{r})$ — площадь поперечного сечения, всюду нормального к линиям тока. Получить аналогичную формулу для анизотропных проводников.

Добавляя (11.3) к уравнениям (10.1) и (10.3), получаем систему уравнений, позволяющую вычислять **E** и **B**, если заданы сторонние э. д. с. и распределение зарядов на отдельных элементах рассматриваемой системы проводников, диэлектриков и магнетиков. Следует, однако, вновь отметить, что линейный закон (11.3) и соотношения (10.3) справедливы лишь для узкого, хотя и весьма распространенного, класса проводников, диэлектриков и магнетиков. В более общем случае все эти «законы» не верны и должны быть заменены более сложными функциональными связями.