§ 12. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

До сих пор предполагалось, что ε, μ, σ являются произвольными функциями t и $\mathbf{r}$. Однако, как правило, они оказываются кусочно-непрерывными функциями координат, т. е. претерпевают разрывы на некоторых границах раздела. Обусловлено это тем, что применяемые на практике технические устройства включают в себя элементы, обладающие различными ε, μ, σ.

В связи с этим можно получить решение уравнений Максвелла лишь в отдельных областях пространства, где коэффициенты ε, μ, σ непрерывны. Полученное таким образом общее решение системы дифференциальных уравнений содержит некоторые произвольные функции. Чтобы их определить и получить решение для всей совокупности областей, необходимо наложить граничные условия, или, как говорят, «сшить» решения на границах областей.

Эти условия «сшивания», налагаемые на векторы **E**, **D**, **B**, **H**, легко вывести, используя интегральную форму уравнений Максвелла (10.4). В самом деле, применять в пограничной области уравнения в дифференциальной форме нельзя, так как поля на границе могут терпеть разрывы, поэтому пространственные производные от них могут не существовать. Однако уравнения в интегральной форме, безусловно, должны выполняться, так как они являются непосредственным следствием экспериментальных фактов.

Используем, например, интегральную теорему Гаусса (3.4) в применении к вектору **D** [см. (10.4)]. В качестве объема V возьмем бесконечно малый цилиндр с основанием S и высотой h, верхний и нижний торцы которого лежат соответственно в диэлектриках *2* и *1* (рис. 12.1). Так как цилиндр мал, то уравнение

$$\oint_S (\mathbf{nD})\,\mathrm{d}S = 4\pi \int_V \rho\,\mathrm{d}V$$

запишется в виде

$$(\mathbf{nD}_2)S - (\mathbf{nD}_1)S + \langle D\rangle lh = 4\pi\rho h S,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности раздела, l — длина окружности основания, $\langle D\rangle$ — среднее значение нормальной к боковой поверхности составляющей **D**.

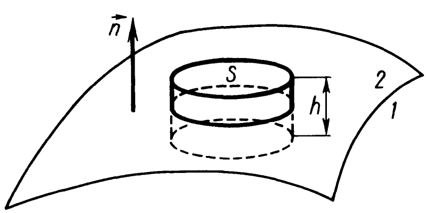

Рис. 12.1

Пусть $h \to 0$ при фиксированном S. При вычислении предела учтем, что **D** всюду ограничено, так что слагаемое $\langle D\rangle lh$ исчезает. Однако в пограничной области могут существовать столь большие скопления заряда, что даже в пределе $h \to 0$ заряд внутри цилиндра на элементе $\mathrm{d}S$ граничной поверхности может быть отличным от нуля и равным

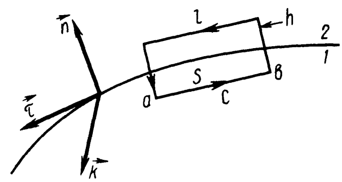

Рис. 12.2

$$\mathrm{d}Q = \lim_{h \to 0} \rho h \mathrm{d}S = \eta \mathrm{d}S, \qquad (12.1)$$

где η — *поверхностная плотность электрического заряда.* Окончательно при $h \to 0$ имеем

$$(\mathbf{nD}_2) - (\mathbf{nD}_1) = 4\pi\eta. \qquad (12.2)$$

Следовательно, нормальная составляющая вектора электрической индукции не имеет разрыва на поверхности раздела двух диэлектриков только в том случае, когда на последней нет свободного поверхностного заряда. При наличии же поверхностного заряда нормальная составляющая $\mathbf{D}$ изменяется на границе скачком на $4\pi\eta$.

Аналогично получаются граничные условия и для вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$. Согласно последнему из уравнений (10.4),

$$\oint_S (\mathbf{nB})\,\mathrm{d}S = 0,$$

откуда

$$(\mathbf{nB}_2) - (\mathbf{nB}_1) = 0, \qquad (12.3)$$

т. е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции не имеет разрыва на поверхности раздела двух магнетиков.

Применим первое из интегральных уравнений Максвелла (10.4) к контуру C (рис. 12.2), получающемуся при рассечении цилиндра (рис. 12.1) вдоль нормали $\mathbf{n}$:

$$\oint_C (\mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l}) - \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{kD})\,\mathrm{d}S = \frac{4\pi}{c}\int_S (\mathbf{kj})\,\mathrm{d}S,$$

где $\mathbf{k} = [\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}]$; $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к поверхности раздела. Пусть теперь $h \to 0$ при малом фиксированном l. Тогда

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\, l + (\mathbf{nH})_b h - (\mathbf{nH})_a h - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{kD})\, lh = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{kj})\, lh.$$

Примем во внимание конечность $\mathbf{H}$ и $\partial\mathbf{D}/\partial t$, а также то, что в пограничной области могут протекать столь большие токи, что даже в пределе $h \to 0$ сила тока, протекающего сквозь контур C на участке $\mathrm{d}l$ поверхности раздела, может быть отлична от нуля и равна

$$\mathrm{d}I = \lim_{h \to 0} (\mathbf{kj})\, h \mathrm{d}l = (\mathbf{ki})\,\mathrm{d}l. \qquad (12.4)$$

Вектор $\mathbf{i}$ называется в таких случаях *плотностью поверхностного тока.* В результате имеем

$$(\boldsymbol{\tau}\mathbf{H}_2) - (\boldsymbol{\tau}\mathbf{H}_1) = 4\pi(\mathbf{ki})/c. \qquad (12.5)$$

Подставив $\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{kn}]$ в (12.5), найдем, ввиду произвольной ориентации $\mathbf{k}$ в касательной плоскости,

$$[\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = 4\pi\mathbf{i}/c. \qquad (12.6)$$

Таким образом, касательная проекция $[\mathbf{nH}]$ вектора напряженности магнитного поля непрерывна на границе раздела двух сред, если отсутствует поверхностный ток проводимости. При наличии же последнего она испытывает на границе раздела скачок, равный $4\pi\mathbf{i}/c$.

Аналогично выводится граничное условие для касательной проекции вектора напряженности электрического поля. Оно следует из второго уравнения (10.4) и имеет вид

$$[\mathbf{nE}_2] - [\mathbf{nE}_1] = 0, \qquad (12.7)$$

т. е. касательная проекция вектора напряженности электрического поля не имеет разрыва на поверхности раздела двух сред.

Итак, граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными ε и μ имеют вид

$$\begin{gathered}(\mathbf{nD}_2) - (\mathbf{nD}_1) = 4\pi\eta, \ [\mathbf{nE}_2] - [\mathbf{nE}_1] = 0; \\ [\mathbf{nH}_2] - [\mathbf{nH}_1] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \ (\mathbf{nB}_2) - (\mathbf{nB}_1) = 0.\end{gathered} \qquad (12.8)$$

§ 13. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

Рассмотрим макроскопический элементарный объем $\mathrm{d}V$, которому соответствуют некоторый распределенный свободный электрический заряд $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V$ и элемент тока $I\mathrm{d}\mathbf{l} = \mathbf{j}\,\mathrm{d}V$. Тогда, согласно закону Кулона и формуле Ампера (1.9), на этот объем в электромагнитном поле будет действовать сила

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}Q\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}] = \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]\right)\mathrm{d}V, \qquad (13.1)$$

что позволяет ввести *плотность силы* $\mathbf{f} = \mathrm{d}\mathbf{F}/\mathrm{d}V$, действующей на распределенные заряды и токи:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]. \qquad (13.2)$$

Естественным следствием (13.2) (см. задачу **1.8**) является выражение для силы, действующей в электромагнитном поле на отдельный точечный заряд e и получившей название *силы Лоренца*: