Вектор $\mathbf{i}$ называется в таких случаях *плотностью поверхностного тока.* В результате имеем

$$(\boldsymbol{\tau}\mathbf{H}_2)-(\boldsymbol{\tau}\mathbf{H}_1)=4\pi(\mathbf{ki})/c. \tag{12.5}$$

Подставив $\boldsymbol{\tau}=[\mathbf{kn}]$ в (12.5), найдем, ввиду произвольной ориентации $\mathbf{k}$ в касательной плоскости,

$$[\mathbf{nH}_2]-[\mathbf{nH}_1]=4\pi\mathbf{i}/c. \tag{12.6}$$

Таким образом, касательная проекция $[\mathbf{nH}]$ вектора напряженности магнитного поля непрерывна на границе раздела двух сред, если отсутствует поверхностный ток проводимости. При наличии же последнего она испытывает на границе раздела скачок, равный $4\pi\mathbf{i}/c$.

Аналогично выводится граничное условие для касательной проекции вектора напряженности электрического поля. Оно следует из второго уравнения (10.4) и имеет вид

$$[\mathbf{nE}_2]-[\mathbf{nE}_1]=0, \tag{12.7}$$

т. е. касательная проекция вектора напряженности электрического поля не имеет разрыва на поверхности раздела двух сред.

Итак, граничные условия на поверхности раздела двух сред с различными ε и μ имеют вид

$$\begin{gathered}(\mathbf{nD}_2)-(\mathbf{nD}_1)=4\pi\eta,\ [\mathbf{nE}_2]-[\mathbf{nE}_1]=0;\\ [\mathbf{nH}_2]-[\mathbf{nH}_1]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i},\ (\mathbf{nB}_2)-(\mathbf{nB}_1)=0.\end{gathered} \tag{12.8}$$

§ 13. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

Рассмотрим макроскопический элементарный объем $\mathrm{d}V$, которому соответствуют некоторый распределенный свободный электрический заряд $\mathrm{d}Q=\rho\mathrm{d}V$ и элемент тока $I\mathrm{d}\mathbf{l}=\mathbf{j}\mathrm{d}V$. Тогда, согласно закону Кулона и формуле Ампера (1.9), на этот объем в электромагнитном поле будет действовать сила

$$\mathrm{d}\mathbf{F}=\mathrm{d}Q\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathrm{d}\mathbf{l}\,\mathbf{B}]=\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]\right)\mathrm{d}V, \tag{13.1}$$

что позволяет ввести *плотность силы* $\mathbf{f}=\mathrm{d}\mathbf{F}/\mathrm{d}V$, действующей на распределенные заряды и токи:

$$\mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{jB}]. \tag{13.2}$$

Естественным следствием (13.2) (см. задачу **1.8**) является выражение для силы, действующей в электромагнитном поле на отдельный точечный заряд e и получившей название *силы Лоренца*:

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right). \tag{13.3}$$

По аналогии, выражение (13.2) называется *плотностью силы Лоренца* в электромагнитном поле.

Задача 13.1. *Показать, что при отсутствии вещества плотность силы Лоренца может быть приведена к виду*

$$\mathbf{f}=-\partial\mathbf{g}/\partial t+\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}, \tag{13.4}$$

или в компонентах

$$f^k=-\partial g^k/\partial t+\partial_i T^{ik},$$

где

$$\mathbf{g}=[\mathbf{EB}]/(4\pi c), \tag{13.5а}$$

$\hat{\mathrm{T}}$ — *тензор натяжений Максвелла, имеющий компоненты*

$$T^{ik}=\frac{1}{4\pi}\left[E^iE^k+B^iB^k-\frac{1}{2}(E^2+B^2)\delta^{ik}\right]. \tag{13.5б}$$

Для выяснения физического смысла $\mathbf{g}$ и T^{ik} воспользуемся законом сохранения импульса и покажем, что электромагнитному полю необходимо приписать механический импульс. Пусть источники электромагнитного поля, т. е. свободные заряды и токи, сосредоточены в некотором объеме V, окруженном неподвижной поверхностью S, и обладают механическим импульсом $\mathbf{P}$. Если через $\mathbf{G}$ обозначить импульс электромагнитного поля в том же объеме, то ясно, что суммарный импульс системы «поле + источники» может измениться лишь в результате перетекания импульса электромагнитного поля через поверхность S. Поэтому можно записать

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{P}+\mathbf{G})=-\oint_S n_i\zeta^i\mathrm{d}S, \tag{13.6}$$

где ζ^i — плотность потока импульса электромагнитного поля в i-м направлении.

В то же время, по второму закону динамики, сила, действующая на источники со стороны электромагнитного поля, равна

$$\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t=\mathbf{F}=\int_V\mathbf{f}\mathrm{d}V,$$

или с учетом (13.4)

$$\mathbf{F}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\mathbf{g}\mathrm{d}V+\int_V\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{d}V.$$

Преобразуя последний интеграл к поверхностному с помощью теоремы Гаусса — Остроградского (2П.6), находим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(P^k+\int_V g^k\mathrm{d}V\right)=\oint_S n_iT^{ik}\mathrm{d}S.$$

Сравнение этой формулы с (13.6) показывает, что

$$\mathbf{G}=\int_V \mathbf{g}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi c}\int_V [\mathbf{EB}]\,\mathrm{d}V, \tag{13.7}$$

т. е. $\mathbf{g}$ — плотность импульса электромагнитного поля, а — T^{ik} — плотность потока k-й компоненты импульса электромагнитного поля в i-м направлении.

При рассмотрении электромагнитного поля в среде необходимо учитывать еще и силы, действующие на связанные заряды и токи. Однако их уже нельзя рассчитывать по формуле (13.2). В самом деле, макроскопическую плотность силы Лоренца естественно определить (см. § 2) как

$$\mathbf{f}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i\left(\mathbf{E}_i+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_i\mathbf{B}_i]\right), \tag{13.8}$$

где $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{B}_i$ характеризуют электромагнитное поле в точке нахождения i-го заряда за вычетом его собственного поля. В случае свободных зарядов, распределение которых мало меняется в пределах ΔV, можно заменить $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{B}_i$ на их средние (макроскопические) значения **E**, **B**, так что из (13.8) с учетом (2.2) и (2.5) сразу вытекает (13.2). Однако в случае связанных зарядов их распределение существенно меняется уже в пределах одной поляризованной молекулы, так что подобную замену сделать нельзя и, следовательно,

$$\mathbf{f}^{\text{связ}}\neq\rho^{\text{связ}}\mathbf{E}+[\mathbf{j}^{\text{связ}}\mathbf{B}]/c. \tag{13.9}$$

Если обобщить соотношение (13.4), выражающее закон сохранения импульса, на случай электромагнитного поля в среде, т. е. положить

$$\mathbf{f}^{\text{полн}}=\mathbf{f}+\mathbf{f}^{\text{связ}}=-\partial\gamma/\partial t+\operatorname{div}\hat{\Theta}, \tag{13.10}$$

то, согласно (13.9), выражения для γ и $\hat{\Theta}$ будут уже отличаться от (13.5). Чтобы найти соответствующие изменения, необходимо вычислить $\mathbf{f}^{\text{связ}}$, т. е. плотность сил, действующих в электромагнитном поле на электрические и магнитные дипольные моменты молекул. Но даже и в этом случае γ и $\hat{\Theta}$, так же как $\mathbf{g}$ и $\hat{\mathrm{T}}$, еще нельзя определить однозначно.

Задача 13.2. *Воспользовавшись законом сохранения момента импульса, показать, что тензор натяжений $\hat{\Theta}$ должен быть симметричным, т. е. $\Theta^{ik}=\Theta^{ki}$.*
Задача 13.3. *Рассчитать подъемную силу постоянного магнита, использовав тензор натяжений Максвелла.*

§ 14. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Выясним теперь, как формулируется в электродинамике один из важнейших физических законов — *закон сохранения энергии,* и покажем, что электромагнитному полю, как и всякому другому материальному объекту, можно приписать энергию.