Сравнение этой формулы с (13.6) показывает, что

$$\mathbf{G}=\int\limits_V \mathbf{g}\,\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi c}\int\limits_V [\mathbf{EB}]\,\mathrm{d}V, \tag{13.7}$$

т. е. $\mathbf{g}$ — плотность импульса электромагнитного поля, а — T^{ik} — плотность потока k-й компоненты импульса электромагнитного поля в i-м направлении.

При рассмотрении электромагнитного поля в среде необходимо учитывать еще и силы, действующие на связанные заряды и токи. Однако их уже нельзя рассчитывать по формуле (13.2). В самом деле, макроскопическую плотность силы Лоренца естественно определить (см. § 2) как

$$\mathbf{f}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i\left(\mathbf{E}_i+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_i\mathbf{B}_i]\right), \tag{13.8}$$

где $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{B}_i$ характеризуют электромагнитное поле в точке нахождения i-го заряда за вычетом его собственного поля. В случае свободных зарядов, распределение которых мало меняется в пределах ΔV, можно заменить $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{B}_i$ на их средние (макроскопические) значения **E**, **B**, так что из (13.8) с учетом (2.2) и (2.5) сразу вытекает (13.2). Однако в случае связанных зарядов их распределение существенно меняется уже в пределах одной поляризованной молекулы, так что подобную замену сделать нельзя и, следовательно,

$$\mathbf{f}^{\text{связ}}\neq\rho^{\text{связ}}\mathbf{E}+[\mathbf{j}^{\text{связ}}\mathbf{B}]/c. \tag{13.9}$$

Если обобщить соотношение (13.4), выражающее закон сохранения импульса, на случай электромагнитного поля в среде, т. е. положить

$$\mathbf{f}^{\text{полн}}=\mathbf{f}+\mathbf{f}^{\text{связ}}=-\partial\gamma/\partial t+\operatorname{div}\hat{\Theta}, \tag{13.10}$$

то, согласно (13.9), выражения для γ и $\hat{\Theta}$ будут уже отличаться от (13.5). Чтобы найти соответствующие изменения, необходимо вычислить $\mathbf{f}^{\text{связ}}$, т. е. плотность сил, действующих в электромагнитном поле на электрические и магнитные дипольные моменты молекул. Но даже и в этом случае γ и $\hat{\Theta}$, так же как $\mathbf{g}$ и $\hat{\mathrm{T}}$, еще нельзя определить однозначно.

Задача 13.2. *Воспользовавшись законом сохранения момента импульса, показать, что тензор натяжений* $\hat{\Theta}$ *должен быть симметричным, т. е.* $\Theta^{ik}=\Theta^{ki}$.
Задача 13.3. *Рассчитать подъемную силу постоянного магнита, использовав тензор натяжений Максвелла.*

§ 14. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Выясним теперь, как формулируется в электродинамике один из важнейших физических законов — *закон сохранения энергии,* и покажем, что электромагнитному полю, как и всякому другому материальному объекту, можно приписать энергию.

Рассмотрим электромагнитное поле в системе, состоящей из *неподвижных* проводников, диэлектриков и магнетиков, т. е. в среде, характеризуемой определенным образом распределенными и не зависящими от времени $\sigma(\mathbf{r})$, $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ или же соответствующими тензорами $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r})$ и $\hat{\mu}(\mathbf{r})$ в анизотропной среде. Под действием силы (13.3) заряды в проводниках перемещаются и за 1 с поле совершает над каждым из них работу $(\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i)$. Плотность мощности, затрачиваемой на перемещение свободных зарядов, равна

$$\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}(\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i)=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i(\mathbf{v}_i \mathbf{E}_i), \tag{14.1}$$

т. е. *работа совершается только электрическим полем.*

Задача 14.1. *Как понять, что магнитное поле* $\mathbf{B}$ *может совершить работу над проводом с током или над железным шариком и в то же время не может изменить энергию отдельного заряда?*

В стационарной системе по закону сохранения энергии совершаемая полем работа будет рассеиваться в виде теплоты, т. е. выражение (14.1) должно представлять собой плотность выделяемой тепловой мощности q. Так как рассматриваются свободные заряды, то (см. § 13) можно заменить в (14.1) $\mathbf{E}_i$ на его макроскопическое значение $\mathbf{E}$. Тогда с учетом (2.5) найдем, что

$$q=(\mathbf{jE}). \tag{14.2}$$

Если же проводники подчиняются закону Ома, то

$$q=(\mathbf{jE})=\sigma E^2=j^2/\sigma. \tag{14.3}$$

Это дифференциальная форма *закона Джоуля — Ленца,* определяющего плотность тепловой мощности, выделяемой в проводящей среде*.

Общее количество теплоты, выделяемое во всем объеме проводников за 1 с, равно

$$P=\int_V (\mathbf{jE})\,\mathrm{d}V. \tag{14.4}$$

Преобразуем теперь $(\mathbf{jE})$, используя уравнения Максвелла (10.1):

$$(\mathbf{jE})=\frac{c}{4\pi}\left\{(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H})-\frac{1}{c}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\right\}.$$

Учитывая, что $(\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H})=(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E})-\operatorname{div}[\mathbf{EH}]$, и используя урав-

---

* В присутствии сторонних сил, очевидно,
$$q=\mathbf{j}\cdot(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}})=j^2/\sigma.$$

нения второй группы (10.1), получаем

$$(\mathbf{jE})=-\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)+\left(\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\}-\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]\right\}. \qquad (14.5)$$

Если выполняется простейшая линейная связь $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, где ε, μ не зависят от времени (неподвижная среда), то (14.5) преобразуется к виду

$$q=(\mathbf{jE})=-\partial w/\partial t-\operatorname{div}\mathbf{S}, \qquad (14.6)$$

$$\text{где}\quad w=\frac{1}{8\pi}[(\mathbf{ED})+(\mathbf{BH})],\quad \mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \qquad (14.7)$$

Подставляя (14.6) в (14.4), с учетом независимости поверхности S от времени находим

$$P=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V w\,\mathrm{d}V-\oint\limits_S(\mathbf{nS})\,\mathrm{d}S. \qquad (14.8)$$

Последнее соотношение позволяет раскрыть физический смысл w и $\mathbf{S}$. В самом деле, так как левая часть (14.8) представляет собой работу за одну секунду, совершаемую электромагнитным полем в объеме V над свободными зарядами, то, очевидно, правая часть (14.8) в соответствии с общим законом сохранения энергии должна быть связана с убылью энергии электромагнитного поля в объеме V или с притоком ее к этому объему. В частности, если рассмотреть стационарный процесс, когда $\partial w/\partial t=0$, то энергия электромагнитного поля в объеме V не изменяется и джоулевы потери компенсируются притоком электромагнитной энергии извне. Таким образом, мы убеждаемся, что вектор $\mathbf{S}$ имеет смысл *плотности потока электромагнитной энергии в среде.*

В другом частном случае, когда система не излучает и $\oint\limits_S(\mathbf{nS})\mathrm{d}S=0$, выделение джоулева тепла связано с убылью энергии электромагнитного поля в объеме V. Таким образом, w может быть интерпретирована как *плотность энергии электромагнитного поля в среде**.

Теорема (14.6) впервые была доказана английским физиком *Дж. Пойнтингом* в 1884 г. и называется *теоремой Пойнтинга,* а $\mathbf{S}$ — *вектором Пойнтинга.* Следует отметить, что теорема Пойнтинга является частным случаем более общей теоремы,

* При этом очевидно, что только часть энергии w следует отнести собственно к электромагнитному полю, другая же часть ее запасается средой в виде энергии связанных зарядов и токов. Аналогичное замечание в общем случае справедливо и для вектора $\mathbf{S}$.

доказанной русским ученым *Н. А. Умовым* в 1874 г., т. е. раньше Пойнтинга, для любого вида энергии, распределенной в пространстве с некоторой плотностью w. Умов впервые ввел в науку понятие плотности потока энергии $\mathbf{S}$. В том случае, когда теплота не выделяется,

$$\partial w/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \tag{14.9}$$

т. е. энергия ведет себя подобно распределенной субстанции, способной вытекать и втекать в заданный объем сквозь окружающую его поверхность. Введенный Умовым вектор плотности потока энергии получил название *вектора Умова*. Поэтому вектор Пойнтинга для плотности потока электромагнитной энергии часто называют еще и *вектором Умова — Пойнтинга*.

Задача 14.2. *Сформулировать теорему Пойнтинга при наличии сторонних э.д.с.*

§ 15. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Мы употребляли до сих пор абсолютную (гауссову) систему единиц СГС, основными механическими единицами которой являются сантиметр, грамм и секунда, а единица количества электричества определяется из закона Кулона (1.3). Но главным в системе Гаусса является форма записи уравнений электромагнитного поля и выражения для силы, действующей на заряд:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{15.1}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),$$

где $c = 2{,}99792458 \cdot 10^{10}$ см/с. Преимуществом этой системы является то, что уравнения имеют симметричный вид и содержат лишь одну размерную постоянную c, имеющую физический смысл скорости света в пустоте, и один безразмерный множитель 4π. Кроме того, в вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и векторы индукций и напряженностей не различаются, что имеет простой физический смысл.

Хевисайд и Лоренц пользовались «рационализированной» системой Гаусса, в которой единицы количества электричества и силы тока выбраны так, что в основных уравнениях не содержится безразмерный коэффициент 4π. В системе Хевисайда — Лоренца уравнения поля и выражение для силы имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,$$