доказанной русским ученым *Н. А. Умовым* в 1874 г., т. е. раньше Пойнтинга, для любого вида энергии, распределенной в пространстве с некоторой плотностью w. Умов впервые ввел в науку понятие плотности потока энергии $\mathbf{S}$. В том случае, когда теплота не выделяется,

$$\partial w/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \tag{14.9}$$

т. е. энергия ведет себя подобно распределенной субстанции, способной вытекать и втекать в заданный объем сквозь окружающую его поверхность. Введенный Умовым вектор плотности потока энергии получил название *вектора Умова*. Поэтому вектор Пойнтинга для плотности потока электромагнитной энергии часто называют еще и *вектором Умова—Пойнтинга*.

Задача 14.2. *Сформулировать теорему Пойнтинга при наличии сторонних э.д.с.*

§ 15. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Мы употребляли до сих пор абсолютную (гауссову) систему единиц СГС, основными механическими единицами которой являются сантиметр, грамм и секунда, а единица количества электричества определяется из закона Кулона (1.3). Но главным в системе Гаусса является форма записи уравнений электромагнитного поля и выражения для силы, действующей на заряд:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{15.1}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \ \ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \ \ \mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),$$

где $c = 2{,}99792458 \cdot 10^{10}$ см/с. Преимуществом этой системы является то, что уравнения имеют симметричный вид и содержат лишь одну размерную постоянную c, имеющую физический смысл скорости света в пустоте, и один безразмерный множитель 4π. Кроме того, в вакууме $\varepsilon = \mu = 1$ и векторы индукций и напряженностей не различаются, что имеет простой физический смысл.

Хевисайд и Лоренц пользовались «рационализированной» системой Гаусса, в которой единицы количества электричества и силы тока выбраны так, что в основных уравнениях не содержится безразмерный коэффициент 4π. В системе Хевисайда—Лоренца уравнения поля и выражение для силы имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}=\varepsilon\mathbf{E},\ \ \mathbf{B}=\mathbf{H}+\mathbf{M}=\mu\mathbf{H}, \tag{15.2}$$

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),$$

причем для вакуума $\varepsilon=\mu=1$.

Эта система отличается от системы Гаусса лишь тем, что в законы взаимодействия зарядов и токов входит множитель $1/(4\pi)$ [к примеру, закон Кулона имеет вид $F_{12}=e_1e_2/(4\pi r^2)$] и поэтому единица заряда в $\sqrt{4\pi}$ раз меньше, чем в системе Гаусса. Соответственно единицы напряженностей полей в $\sqrt{4\pi}$ раз больше, так как сила, действующая на заряд в поле, имеет одинаковый вид в обеих системах.

В последнее время в электро- и радиотехнике используется *рационализированная система* МКСА. В ней, как видно из названия, используются основные единицы — метр, килограмм, секунда и ампер и, кроме того, из уравнений изгоняется коэффициент 4π (как это делали Хевисайд и Лоренц). Однако главное отличие этой системы состоит в том, что в уравнениях Максвелла отсутствует множитель c, но при этом для вакуума выбираются отличные от единицы ε и μ, т. е. векторы напряженностей и индукций различаются между собой. В качестве единиц количества электричества, силы тока и напряжения выбираются соответственно кулон, ампер и вольт (так как они взаимозависимы, то достаточно выбрать лишь одну из этих единиц, например кулон).

Вместо (15.1) в рационализированной системе МКСА имеем:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho,\ \operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P},\ \mathbf{H}=\mu_0^{-1}\mathbf{B}-\mathbf{M},\ \mathbf{F}=e(\mathbf{E}+[\mathbf{vB}]). \tag{15.3}$$

Чтобы выразить **E**, **D**, **B**, **H**, **j**, ρ через соответствующие величины $\mathbf{E}_г$, $\mathbf{D}_г$, $\mathbf{B}_г$, $\mathbf{H}_г$, $\mathbf{j}_г$, $\rho_г$ в системе Гаусса, т. е. найти коэффициенты в уравнениях

$$\mathbf{r}_г=R\mathbf{r},\ m_г=Mm,\ e_г=Qe,\ \mathbf{E}_г=эE,$$

$$\mathbf{D}_г=d\mathbf{D},\ \mathbf{B}_г=b\mathbf{B},\ \mathbf{H}_г=h\mathbf{H},\ \mathbf{v}_г=R\mathbf{v},$$

$$\rho_г=Q\rho/R^3,\ \mathbf{j}_г=\rho_г\mathbf{v}_г=Q\mathbf{j}/R^2,\ c_г=Rc,$$

где m — масса заряженной частицы, перепишем (15.1) в новых единицах и приведем к виду (15.3), выбрав для этого соответствующие коэффициенты $э$, d, b, h и считая, что $R=10^2$; $M=10^3$; $Q=2\ 997\ 924\ 580$.

Уравнения первой группы для вакуума в новых единицах примут вид

$$h\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}-\frac{d}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\frac{Q}{R^2}\mathbf{j},$$

$$d\,\mathrm{div}\,\mathbf{D}=4\pi\frac{Q}{R^2}\rho,\quad d\mathbf{D}=э\mathbf{E}, \tag{15.4}$$

$$h\mathbf{H}=b\mathbf{B},\quad \mathbf{F}=\frac{Qe}{MR}\left(э\mathbf{E}+\frac{b}{c}[\mathbf{vB}]\right).$$

Чтобы (15.4) было эквивалентно (15.3), необходимо положить:

$$ch/d=1,\quad R^2d/(4\pi Q)=1;\quad cэ/b=1;$$

$$MR/(Qэ)=1;\quad \varepsilon_0=э/d;\quad \mu_0=h/b. \tag{15.5}$$

Подставляя $c=299\,792\,458$ м/с и указанные выше значения R, M и Q в (15.5), получаем:

$$э^{-1}=29\,979{,}2458;\quad b=10^4\ \text{м/с};\quad h=4\pi\cdot10^{-3}\ \text{с/м};$$

$$d=4\pi\cdot299\,792{,}458;\quad \varepsilon_0^{-1}=40\pi\,(29\,979{,}2458)^2;\quad \mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \text{с}^2/\text{м}^2.$$

Таким образом, в рационализированной системе МКСА выполняется соотношение $\varepsilon_0\mu_0=1/c^2$.

Задача 15.1. *Построить систему единиц МКС на основе уравнений* (15.2) *при* $\varepsilon=\mu=1$ *для вакуума.*