2

ГЛАВА

СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

Стационарные электромагнитные поля, т. е. поля, не изменяющиеся со временем, поддаются наиболее полному описанию и чаще всего встречаются на практике. Для решения соответствующих задач электростатики и магнитостатики были разработаны эффективные математические методы. Большое значение имеют различные приближенные методы (типа мультипольного разложения), применение которых неизбежно при решении большинства практических задач, возникающих, например, при расчете структуры поля постоянного магнита, емкости конденсатора сложной формы или сопротивления некоторой системы электродов. Чрезвычайно поучительны и методы магнитостатики сверхпроводников, изучение которых стало особенно актуальным в связи с открытием в 1987 г. высокотемпературной сверхпроводимости.

§ 16. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЗАРЯДОВ. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Простейшими задачами теории электромагнитного поля являются *стационарные задачи,* когда все входящие в основные уравнения (10.1) величины *не зависят от времени* t. В этом случае производные по времени равны нулю и система (10.1) разбивается на две подсистемы — (Э) и (M):

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho, \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \qquad (Э) \\ &\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P} \end{aligned}$$

(в простейшем случае $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$).

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c, \\ &\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \qquad (M) \\ &\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M} \end{aligned}$$

(в простейшем случае $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$).

При решении электростатических задач используется система (Э), а при решении магнитостатических — система (M). Однако плотность тока $\mathbf{j}$, входящая в (M), в наиболее распространенном случае определяется из закона Ома: $\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}})$, т. е. зависит от $\mathbf{E}$. В этом случае для нахождения $\mathbf{j}$ необходимо использовать решение системы (Э).

Из-за наличия токов проводимости магнитостатические задачи в общем случае относятся к стационарным, но неравновесным системам, так как в последних происходит непрерывное выделение теплоты. Электростатические же задачи относятся к равновесным системам. Перейдем к рассмотрению электростатических задач.

Уравнения электростатики (Э) позволяют определять напряженность электрического поля:

1) во всем пространстве по заданному распределению зарядов;

2) в некоторой области V по заданным условиям на ее границе S и заданному распределению зарядов внутри V;

3) в диэлектрической среде при наличии заряженных проводников;

4) в диэлектрической среде при наличии внешнего поля с напряженностью $\mathbf{E}_0$.

Рассмотрим первую задачу. Уравнения электростатики в вакууме имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0. \tag{16.1}$$

Эти уравнения можно использовать и для определения напряженности $\mathbf{E}$ поля в диэлектрике, если задано распределение связанных зарядов $\rho^{\text{связ}}=-\operatorname{div}\mathbf{P}$, которое надо добавить к плотности ρ свободных зарядов*.

Так как $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$, то

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi\equiv-\nabla\varphi, \tag{16.2}$$

где φ — электростатический потенциал. Подставляя (16.2) в (16.1), получаем

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho, \tag{16.3}$$

т. е. *уравнение Пуассона* для потенциала φ. В случае $\rho=0$ оно превращается в *уравнение Лапласа*

$$\Delta\varphi=0. \tag{16.4}$$

Уравнения Лапласа и Пуассона суть дифференциальные уравнения в частных производных эллиптического типа. Как известно, для их решения необходимо задавать определенные *граничные условия*, т. е. значения φ или $(\mathbf{nE})$ на границе S рассматриваемой области. В физике наиболее важно решение задач при естественных граничных условиях, когда $S\to\infty$. В этом случае обычно полагают, что $\varphi(\mathbf{r})\to\text{const}$ при $r\to\infty$. В простейшем случае $\varphi\to0$.

При решении многих задач приходится использовать общее решение уравнения Лапласа. Чтобы найти его, изучим некоторые свойства этого уравнения.

Задача 16.1. *Убедиться, что функция $\varphi_l=(\mathbf{ar})^l$ является решением (в общем случае комплексным) уравнения Лапласа, если при $l\geqslant2$ считать, что $\mathbf{a}$ — постоянный изотропный вектор, т. е. $a^2=0$.*

Чтобы удовлетворить условию $a^2=0$, выберем декартов вектор $\mathbf{a}=(i, 0, 1)$ и запишем φ_l в сферических координатах:

$$\varphi_l=r^l(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\cos\alpha)^l. \tag{16.5}$$

Заметим, что $\varphi_l r^{-l}$ можно представить в виде конечного ряда Фурье по α

---

* В случае однородной диэлектрической среды, когда $\varepsilon=\text{const}$, $\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho/\varepsilon$, т. е. можно использовать все результаты, вытекающие из (16.1), осуществив в последних замену $\rho\to\rho/\varepsilon$. Имея это в виду, далее мы будем рассматривать лишь случай вакуума.

$$(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\alpha)^l = P_l(\cos\vartheta) + \\ + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(-i)^m l!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\vartheta)\cos m\alpha, \qquad (16.6)$$

коэффициентами которого являются *полиномы Лежандра* $P_l(\cos\vartheta)\equiv P_l^0(\cos\vartheta)$ и *присоединенные полиномы Лежандра*

$$P_l^m(\cos\vartheta) = i^m\frac{(l+m)!}{2\pi l!}\int_0^{2\pi}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\alpha)^l\cos m\alpha\, d\alpha. \qquad (16.7)$$

Задача 16.2. *Вычислить* $P_l^m(\cos\vartheta)$ *при* $l=0,\ 1,\ 2.$

Задача 16.3. *Доказать, используя* (16.7), *справедливость разложения*

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}(\mathbf{a}\nabla)^l\frac{1}{r} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) \quad (a<r), \qquad (16.8)$$

из которого вытекает еще одно представление для полиномов Лежандра:

$$P_l(\cos\vartheta) = (-1)^l\frac{r^{l+1}}{a^l l!}(\mathbf{a}\nabla)^l\frac{1}{r}, \qquad (16.9)$$

где $\cos\vartheta = (\mathbf{ar})/(ar)$, $\mathbf{a}$ — *постоянный вектор.*

Задача 16.4. *Доказать, что если* $\varphi(\mathbf{r})$ — *решение уравнения Лапласа, то* $r^{-1}\varphi(\mathbf{r}r^{-2})$ *также его решение при* $r\neq 0$ (*теорема Кельвина*). *Показать, что другими его решениями будут* $(\mathbf{a}\nabla)\,\varphi(\mathbf{r})$ и $(\mathbf{a}\,[\mathbf{r}\nabla])\,\varphi(\mathbf{r})$, *где* $\mathbf{a}$ — *постоянный вектор.*

Указанных свойств уравнения Лапласа вполне достаточно для построения его общего решения. В самом деле, по теореме Кельвина, решением, например, будет функция $(r\neq 0)$

$$r^{-1}\varphi_l(\mathbf{r}r^{-2}) = r^{-l-1}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\alpha)^l. \qquad (16.10)$$

В частности, при $l=0$ находим простейшее решение $\varphi = 1/r$, отвечающее полю точечного заряда. Выражение $r^{-l-1}P_l(\cos\vartheta)$, согласно (16.9), также является решением при $r\neq 0$, так как оно получается из $1/r$ l-кратным действием оператора $(\mathbf{a}\nabla)$.

Если рассмотреть оператор $(\mathbf{e}_3[\mathbf{r}\nabla]) = \partial/\partial\alpha$, то с его помощью можно выделить из (16.5) любую компоненту Фурье. В самом деле, если подействовать на (16.5) оператором

$$\prod_{\substack{m'=-l\\(m'\neq m)}}^{+l}\left(im' + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right),$$

то останется лишь член, содержащий $\exp(im\alpha)$. Таким образом, каждый член ряда Фурье в (16.5) или (16.10) является решением уравнения Лапласа. Поэтому, используя принцип суперпозиции, общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}(a_l r^l + b_l r^{-l-1})\sum_{m=0}^{l}P_l^m(\cos\vartheta)(c_m\cos m\alpha + d_m\sin m\alpha), \qquad (16.11)$$

где a_l, b_l, c_m, d_m — произвольные постоянные.

(18.4)

Задача 16.5. *Предположив, что потенциал* φ ***не зависит от одной из координат,*** *показать, что общее решение* ***соответствующего двумерного уравнения*** *Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид*

$$\varphi=(b_0+a_0\ln r)(c_0\alpha+d_0)+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m r^m+b_m r^{-m})(c_m\cos m\alpha+d_m\sin m\alpha), \qquad (16.12)$$

где a_m, b_m, c_m, d_m — *произвольные постоянные;* $m=0$, 1, 2, ...

§ 17. ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАРЯДОВ

Потенциал точечного заряда e, помещенного в начале координат, согласно (3.9), равен

$$\varphi=e/r.$$

Убедимся, что это решение можно использовать для нахождения потенциала пространственно распределенных зарядов. С этой целью представим с помощью δ-функции плотность произвольно распределенного заряда ρ в виде

$$\rho(\mathbf{r})=\int\rho(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{R})\,\mathrm{d}V', \quad \mathbf{R}\equiv\mathbf{r}-\mathbf{r}',$$

и подставим в уравнение Пуассона (16.3):

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=-4\pi\int\rho(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{R})\,\mathrm{d}V'. \qquad (17.1)$$

С другой стороны, из (3.9)

$$\Delta(1/R)=-4\pi\delta(\mathbf{R}), \qquad (17.2)$$

поэтому (17.1) можно переписать:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=\int\rho(\mathbf{r}')\Delta\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'=\Delta\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'.$$

Следовательно, решение уравнения Пуассона (16.3) во всем пространстве имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'+\varphi_0(\mathbf{r}), \qquad (17.3)$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ — некоторое решение уравнения Лапласа. По своему физическому смыслу потенциал φ_0 должен задаваться распределением бесконечно удаленных зарядов, не входящих в $\rho(\mathbf{r})$. Поэтому если считать, что в плотности $\rho(\mathbf{r})$ учтен вклад всех имеющихся зарядов, в том числе и находящихся в бесконечности, то можно положить $\varphi_0(\mathbf{r})\equiv 0$ и

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'. \qquad (17.4)$$

Такой выбор согласуется и с законом Кулона (3.3), который не противоречит (17.3) только при условии $\nabla\varphi_0=0$.