Задача 16.5. *Предположив, что потенциал* φ *не зависит от одной из координат, показать, что общее решение соответствующего двумерного уравнения Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид*

$$\varphi=(b_0+a_0\ln r)(c_0\alpha+d_0)+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m r^m+b_m r^{-m})(c_m\cos m\alpha+d_m\sin m\alpha), \quad (16.12)$$

где a_m, b_m, c_m, d_m *— произвольные постоянные;* $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

§ 17. ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАРЯДОВ

Потенциал точечного заряда e, помещенного в начале координат, согласно (3.9), равен

$$\varphi=e/r.$$

Убедимся, что это решение можно использовать для нахождения потенциала пространственно распределенных зарядов. С этой целью представим с помощью δ-функции плотность произвольно распределенного заряда ρ в виде

$$\rho(\mathbf{r})=\int\rho(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{R})\,\mathrm{d}V',\quad \mathbf{R}\equiv\mathbf{r}-\mathbf{r}',$$

и подставим в уравнение Пуассона (16.3):

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=-4\pi\int\rho(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{R})\,\mathrm{d}V'. \quad (17.1)$$

С другой стороны, из (3.9)

$$\Delta(1/R)=-4\pi\delta(\mathbf{R}), \quad (17.2)$$

поэтому (17.1) можно переписать:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=\int\rho(\mathbf{r}')\Delta\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'=\Delta\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'.$$

Следовательно, решение уравнения Пуассона (16.3) во всем пространстве имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'+\varphi_0(\mathbf{r}), \quad (17.3)$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ — некоторое решение уравнения Лапласа. По своему физическому смыслу потенциал φ_0 должен задаваться распределением бесконечно удаленных зарядов, не входящих в $\rho(\mathbf{r})$. Поэтому если считать, что в плотности $\rho(\mathbf{r})$ учтен вклад всех имеющихся зарядов, в том числе и находящихся в бесконечности, то можно положить $\varphi_0(\mathbf{r})\equiv 0$ и

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V'. \quad (17.4)$$

Такой выбор согласуется и с законом Кулона (3.3), который не противоречит (17.3) только при условии $\nabla\varphi_0=0$.

Задача 17.1. *Записать решение уравнения Пуассона в случае сферически-симметричного распределения заряда* $\rho(r)$.

Задача 17.2. *Показать, что решение* (17.4) *удовлетворяет естественному граничному условию* $\varphi \to 0$ *при* $r \to \infty$, *только если* $\rho(\mathbf{r})$ *убывает при* $r \to \infty$ *быстрее, чем* r^{-2}.

В физических приложениях часто приходится искать решение уравнения Пуассона в некоторой области V, ограниченной замкнутой поверхностью S. В этом случае по аналогии с (17.3) положим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} \mathrm{d}V' + \varphi_0(\mathbf{r}). \tag{17.5}$$

Как видно, (17.5) является решением уравнения Пуассона и удовлетворяет заданным граничным условиям на S, если φ_0 удовлетворяет уравнению Лапласа и определенным граничным условиям на S. В итоге задача сводится к решению уравнения Лапласа в области V при некоторых граничных условиях на S.

Как мы убедимся позже, в физических задачах могут встречаться три типа граничных условий:

1) на S задан потенциал φ (задача Дирихле);

2) на S задана нормальная составляющая поля $(\mathbf{nE})$ (задача Неймана);

3) на одной части S задан потенциал φ, а на другой ее части — нормальная составляющая поля $(\mathbf{nE})$ (смешанная граничная задача).

Покажем, что в любом случае эти условия определяют напряженность $\mathbf{E}$ поля однозначно. В самом деле, если это не так и существует два разных решения уравнения Лапласа $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$, то их разность $u \equiv \varphi_0^{(2)} - \varphi_0^{(1)}$ также удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, причем на S либо $u = 0$, либо $(\mathbf{n}\nabla)u = 0$. Поэтому если применить теорему Гаусса — Остроградского к вектору $u\nabla u$, для которого $\operatorname{div}(u\nabla u) = (\nabla u)^2$, то

$$\int\limits_V (\nabla u)^2 \mathrm{d}V = \oint\limits_S u(\mathbf{n}\nabla)u \mathrm{d}S = 0,$$

что возможно только при $\nabla u \equiv 0$. Доказанная *теорема единственности* очень важна, так как вызывает уверенность в правильности найденных частных решений, если они удовлетворяют граничным условиям.

§ 18. ПОТЕНЦИАЛ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ

Если заряд сосредоточен на некоторой поверхности S, то, вводя *поверхностную плотность заряда* $\eta(\mathbf{r})$, определяющую заряд на элементе поверхности $\mathrm{d}S$ согласно формуле $\mathrm{d}Q = \eta \mathrm{d}S$, легко