Задача 17.1. *Записать решение уравнения Пуассона в случае сферически-симметричного распределения заряда* $\rho(r)$.

Задача 17.2. *Показать, что решение* (17.4) *удовлетворяет естественному граничному условию* $\varphi\to 0$ *при* $r\to\infty$, *только если* $\rho(\mathbf{r})$ *убывает при* $r\to\infty$ *быстрее, чем* r^{-2}.

В физических приложениях часто приходится искать решение уравнения Пуассона в некоторой области V, ограниченной замкнутой поверхностью S. В этом случае по аналогии с (17.3) положим

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}V'+\varphi_0(\mathbf{r}). \tag{17.5}$$

Как видно, (17.5) является решением уравнения Пуассона и удовлетворяет заданным граничным условиям на S, если φ_0 удовлетворяет уравнению Лапласа и определенным граничным условиям на S. В итоге задача сводится к решению уравнения Лапласа в области V при некоторых граничных условиях на S.

Как мы убедимся позже, в физических задачах могут встречаться три типа граничных условий:

1) на S задан потенциал φ (задача Дирихле);

2) на S задана нормальная составляющая поля $(\mathbf{nE})$ (задача Неймана);

3) на одной части S задан потенциал φ, а на другой ее части — нормальная составляющая поля $(\mathbf{nE})$ (смешанная граничная задача).

Покажем, что в любом случае эти условия определяют напряженность $\mathbf{E}$ поля однозначно. В самом деле, если это не так и существует два разных решения уравнения Лапласа $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$, то их разность $u\equiv\varphi_0^{(2)}-\varphi_0^{(1)}$ также удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$, причем на S либо $u=0$, либо $(\mathbf{n}\nabla)u=0$. Поэтому если применить теорему Гаусса — Остроградского к вектору $u\nabla u$, для которого $\operatorname{div}(u\nabla u)=(\nabla u)^2$, то

$$\int\limits_V(\nabla u)^2\,\mathrm{d}V=\oint\limits_S u(\mathbf{n}\nabla)u\mathrm{d}S=0,$$

что возможно только при $\nabla u\equiv 0$. Доказанная *теорема единственности* очень важна, так как вызывает уверенность в правильности найденных частных решений, если они удовлетворяют граничным условиям.

§ 18. ПОТЕНЦИАЛ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЗАРЯДОВ

Если заряд сосредоточен на некоторой поверхности S, то, вводя *поверхностную плотность заряда* $\eta(\mathbf{r})$, определяющую заряд на элементе поверхности $\mathrm{d}S$ согласно формуле $\mathrm{d}Q=\eta\mathrm{d}S$, легко получить из закона Кулона выражение для потенциала

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\frac{\eta(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}S'. \tag{18.1}$$

Но (18.1) можно вывести и из общей формулы (17.4). Так, если поверхность S задается уравнением $f(\mathbf{r})=0$, то удобно ввести новые координаты u^1, u^2, u^3, в которых новое уравнение поверхности есть $u^3=0$. С этой целью положим

$$u^3=f(\mathbf{r}) \tag{18.2}$$

и будем считать $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3)$. Но элемент объема $\mathrm{d}V=\mathrm{d}S\,\mathrm{d}l$, где $\mathrm{d}l$ — смещение вдоль нормали к поверхности, которое с учетом (18.2) равно

$$\mathrm{d}l=\mathrm{d}f/|\nabla f|=\mathrm{d}u^3/|\nabla f|. \tag{18.3}$$

Теперь ясно, что для согласования (18.1) с (17.4) необходимо положить

$$\rho(\mathbf{r})=\eta|\nabla f|\delta(u^3)=\eta|\nabla f|\delta[f(\mathbf{r})]. \tag{18.4}$$

При практическом использовании формулы (18.1) ее удобно записывать в координатах u^i. Для этого можно исходить из выражения для объема (см. задачу **9** приложения):

$$\mathrm{d}V=\sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3=\mathrm{d}S\,\mathrm{d}u^3\,|\nabla f|^{-1}, \tag{18.5}$$

где

$$g=\det\|g_{ik}\|,\quad g_{ik}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^i}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u^k}\right). \tag{18.6}$$

Но на поверхности $u^3=0$ вектор $\partial\mathbf{r}/\partial u^3$ совпадает с нормалью, а векторы $\partial\mathbf{r}/\partial u^1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u^2$ лежат в касательной плоскости. Поэтому

$$g_{13}=g_{23}=0,\quad g_{33}=|\nabla f|^{-2},\quad g=(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)g_{33}$$

и из (18.5)

$$\mathrm{d}S=|\nabla f|\sqrt{g}\,\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2=\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2, \tag{18.7}$$

т. е. гауссова форма элемента поверхности, которая удобна, если поверхность задается параметрически уравнением $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u^1, u^2)$. Тогда (18.1) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_S\frac{\eta(u^1, u^2)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u^1, u^2)|}\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,\mathrm{d}u^1\,\mathrm{d}u^2. \tag{18.8}$$

Если заряд оказывается сосредоточенным вдоль некоторой линии C, то вводится *линейная плотность заряда* $\varkappa(\mathbf{r})$, определяющая заряд на элементе длины $\mathrm{d}l$ по формуле $\mathrm{d}Q=\varkappa\mathrm{d}l$. Тогда из закона Кулона

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_C \frac{\varkappa(\mathbf{r}')}{R}\mathrm{d}l'. \qquad (18.9)$$

Задача 18.1. *Показать, что объемная плотность заряда в случае, когда заряд с линейной плотностью* $\varkappa(\mathbf{r})$ распределен вдоль линии, задаваемой пересечением двух поверхностей $f_1(\mathbf{r})=0$, $f_2(\mathbf{r})=0$, *равна*

$$\rho(\mathbf{r})=\varkappa(\mathbf{r})\delta[f_1(\mathbf{r})]\delta[f_2(\mathbf{r})]\frac{|\nabla f_1|^2|\nabla f_2|^2}{|[\nabla f_1\nabla f_2]|}.$$

Задача 18.2. *Найти потенциал равномерно заряженного кольца радиуса a и заряда e. Результат выразить через полный эллиптический интеграл первого рода*

$$K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}} \quad (0\leqslant k<1).$$

§ 19. ПОТЕНЦИАЛ ОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ (МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим систему зарядов, сосредоточенную в некоторой области V, т. е. предположим, что $\rho\neq 0$ только внутри V. Пусть область V конечна и может быть включена в некоторый шар радиуса a. Поместим начало координат O в центр этого шара и введем обозначения: $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор произвольного заряда (рис. 19.1).

Очевидно, что потенциал данной системы зарядов может быть вычислен по формуле (17.4):

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_V\frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (19.1)$$

Однако пусть нас интересует поле на больших расстояниях от системы, т. е. при $r\gg a$. Поскольку на таких расстояниях $\rho=0$, потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому представляет собой убывающую часть общего решения (16.11):

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} r^{-l-1}P_l^m(\cos\vartheta)(a_{lm}\cos m\alpha+b_{lm}\sin m\alpha). \qquad (19.2)$$

Такое представление потенциала называется *мультипольным разложением*, коэффициенты a_{lm} и b_{lm} — *мультипольными моментами* порядка (l, m) данной системы зарядов, а число $n=2^l$ — *мультипольностью*. Очевидно, потенциал 2^l-поля имеет вид

$$\varphi_l=\sum_{m=0}^{l} r^{-l-1}P_l^m(\cos\vartheta)(a_{lm}\cos m\alpha+b_{lm}\sin m\alpha) \qquad (19.3)$$