

из закона Кулона

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_C \frac{\kappa(\mathbf{r}')}{R} dl'. \quad (18.9)$$

**Задача 18.1.** Показать, что объемная плотность заряда в случае, когда заряд с линейной плотностью  $\kappa(\mathbf{r})$  распределен вдоль линии, задаваемой пересечением двух поверхностей  $f_1(\mathbf{r})=0$ ,  $f_2(\mathbf{r})=0$ , равна

$$\rho(\mathbf{r}) = \kappa(\mathbf{r}) \delta[f_1(\mathbf{r})] \delta[f_2(\mathbf{r})] \frac{|\nabla f_1|^2 |\nabla f_2|^2}{|\nabla f_1 \nabla f_2|}.$$

**Задача 18.2.** Найти потенциал равномерно заряженного кольца радиуса  $a$  и заряда  $e$ . Результат выразить через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta}} \quad (0 \leq k < 1).$$

## § 19. ПОТЕНЦИАЛ ОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ (МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Рассмотрим систему зарядов, сосредоточенную в некоторой области  $V$ , т. е. предположим, что  $\rho \neq 0$  только внутри  $V$ . Пусть область  $V$  конечна и может быть включена в некоторый шар радиуса  $a$ . Поместим начало координат  $O$  в центр этого шара и введем обозначения:  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения,  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор произвольного заряда (рис. 19.1).

Очевидно, что потенциал данной системы зарядов может быть вычислен по формуле (17.4):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (19.1)$$

Однако пусть нас интересует поле на больших расстояниях от системы, т. е. при  $r \gg a$ . Поскольку на таких расстояниях  $\rho=0$ , потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому представляет собой убывающую часть общего решения (16.11):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^{-l-1} P_l^m(\cos \vartheta) (a_{lm} \cos m\alpha + b_{lm} \sin m\alpha). \quad (19.2)$$

Такое представление потенциала называется мультипольным разложением, коэффициенты  $a_{lm}$  и  $b_{lm}$  — мультипольными моментами порядка  $(l, m)$  данной системы зарядов, а число  $n=2^l$  — мультипольностью. Очевидно, потенциал  $2^l$ -поля имеет вид

$$\varphi_l = \sum_{m=0}^l r^{-l-1} P_l^m(\cos \vartheta) (a_{lm} \cos m\alpha + b_{lm} \sin m\alpha) \quad (19.3)$$

и убывает при  $r \rightarrow \infty$  как  $r^{-l-1}$ . В частности, при  $l=0$  ( $n=1$ ) получаем поле одиночного заряда (*монополя*), при  $l=1$  ( $n=2$ ) — поле *диполя*, при  $l=2$  ( $n=4$ ) — поле *квадруполя* и т. д.

Коэффициенты мультипольного разложения (19.2) зависят от характера распределения заряда  $\rho(\mathbf{r})$ . Чтобы установить эту зависимость, обратимся к общей формуле (19.1) и произведем в ней разложение в ряд Тейлора:

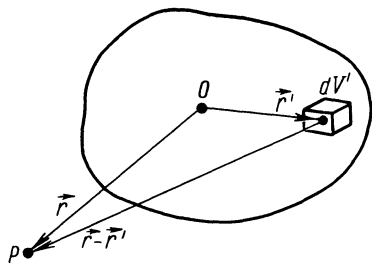


Рис. 19.1

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^l \frac{1}{r}, \quad (19.4)$$

справедливое при  $r > a > r'$ . Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \nabla)^l \frac{1}{r} dV', \quad (19.5)$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int_V \rho(\mathbf{r}') x'^{i_1} \dots x'^{i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{1}{r} dV' \equiv \\ &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} Q^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (19.6)$$

где введен тензор  $2^l$ -польного момента

$$Q^{i_1 \dots i_l} = \int_V \rho(\mathbf{r}') x'^{i_1} \dots x'^{i_l} dV'. \quad (19.7)$$

Одним из неудобств координатного мультипольного разложения (19.6) является то, что не все слагаемые в нем независимы, так как, согласно (19.3), потенциал  $2^l$ -поля должен содержать только  $2l+1$  произвольную постоянную, а число независимых компонент у тензора  $Q^{i_1 \dots i_l}$  равно

$$N = C_{l+2}^2 = 2l+1 + l(l-1)/2 \geq 2l+1. \quad (19.8)$$

**Задача 19.1.** Доказать формулу (19.8).

Таким образом, между потенциалами типа (19.6) должны существовать тождественные соотношения — по  $l(l-1)/2$  соотношений на каждый  $2^l$ -поль. Чтобы понять, в чем здесь дело, изучим поле отдельного мультиполя подробнее. Сначала построим  $2^l$ -поль. Перенесем заряд  $e$  на вектор  $\mathbf{a}_1$  и в точку, где он

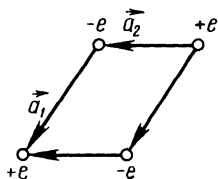


Рис. 19.2

находился, поместим новый заряд  $-e$ . Так строится диполь ( $l=1$ ). Сместим теперь диполь на вектор  $\mathbf{a}_2$  и в точки, где размещались прежние заряды, поместим заряды противоположных знаков. Так получается квадруполь (рис. 19.2), соответствующий значению  $l=2$ . Совершив указанную операцию  $l$  раз, мы и получим  $2^l$ -поль.

**Задача 19.2.** Показать, что потенциал построенного выше  $2^l$ -поля на больших расстояниях от него равен

$$\varphi_l = e(-1)^l \left[ \prod_{i=1}^l (\mathbf{a}_i \nabla) \right] \frac{1}{r}. \quad (19.9)$$

Очевидно, что число различных  $2^l$ -полей определяется числом независимых комбинаций  $l$  векторов  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ . Допустим, что  $k$  векторов мы установили вдоль оси  $Z$ . Тогда  $l-k$  оставшихся векторов можно установить либо вдоль оси  $X$ , либо вдоль оси  $Y$ . Таких комбинаций возможно  $l-k+1$ , так как вдоль оси  $X$  можно установить  $0, 1, 2, \dots, l-k$  векторов. Следовательно, полное число комбинаций равно

$$N = \sum_{k=0}^l (l-k+1) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2)$$

и совпадает с числом независимых компонент тензора  $Q^{i_1 \dots i_l}$ .

Однако не все эти комбинации приводят к независимым потенциалам. В самом деле, при  $l \geq 2$  среди  $l$  векторов могут встретиться два одинаковых, т. е.  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = a\mathbf{e}_s$ , где  $\mathbf{e}_s$  — один из базисных векторов. В этом случае между потенциалами (19.9) появится линейная связь, основанная на тождестве

$$\sum_{s=1}^3 (\mathbf{e}_s \nabla)^2 \frac{1}{r} = \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0. \quad (19.10)$$

Таких тождеств, очевидно, столько же, сколько существует возможностей выбора двух совпадающих векторов, т. е.  $C_l^2$ . Отсюда ясно, что число независимых потенциалов  $\varphi_l$  равно

$$N_l = N - C_l^2 = 2l + 1, \quad (19.11)$$

как и должно быть согласно (19.3).

**Задача 19.3.** Показать, что если для некоторой системы зарядов  $Q^{i_1 \dots i_k} = 0$  при  $k < l$ , то результат вычисления  $Q^{i_1 \dots i_l}$  не зависит от выбора начала координат.

Вычислим теперь напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля, создаваемого диполем с дипольным моментом  $\mathbf{p}$ . Полагая в (19.9)  $l=1$ ,  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}/e$ , имеем:

$$\varphi_1 = -(\mathbf{p} \nabla) r^{-1} = (\mathbf{p} \mathbf{r}) / r^3; \quad (19.12)$$

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\nabla (\mathbf{p} \mathbf{r}) r^{-3} = [3\mathbf{r}(\mathbf{p} \mathbf{r}) - \mathbf{p} r^2] r^{-5}. \quad (19.13)$$

Картина линий напряженности этого поля изображена на рис. 19.3 (см. задачу 1.3).

**Задача 19.4.** Найти с помощью (19.9) напряженность  $E_2$  электрического поля квадруполь.

Рассмотрим более подробно квадрупольный член разложения потенциала произвольной ограниченной системы зарядов. Согласно (19.6), имеем

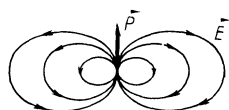


Рис. 19.3

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} Q^{ik} \partial_i \partial_k \left( \frac{1}{r} \right). \quad (19.14)$$

Учитывая тождества (19.10), к тензору квадрупольного момента  $Q^{ik}$  всегда можно добавить единичный тензор вида  $\alpha \delta^{ik}$ , где  $\alpha$  — постоянная. Поэтому при расчете  $Q^{ik}$  вместо (19.7) удобно использовать формулу

$$Q^{ik} = \int \rho(\mathbf{r}') (x'^i x'^k - \delta^{ik} r'^2/3) dV'. \quad (19.15)$$

Построенный тензор  $\hat{Q}$  удовлетворяет инвариантному условию

$$\text{Sp} \hat{Q} = Q^i_i = 0 \quad (19.16)$$

и поэтому имеет не шесть, а только пять независимых компонент в полном согласии с (19.11).

**Задача 19.5.** Получить двумерное мультипольное разложение, справедливое для распределений заряда  $\rho(\mathbf{r})$ , не зависящих от одной из координат и сосредоточенных внутри некоторого цилиндра конечного радиуса  $a$ . Найти двумерный аналог формулы (19.9).

На практике, пользуясь мультипольными разложениями (19.2) или (19.6), обычно ограничиваются лишь первыми несколькими членами ряда. Для выяснения точности такого приближения воспользуемся оценкой, вытекающей из (19.6):

$$|\varphi_l| \leq r^{-l-1} \max_{\{i_1 \dots i_l\}} |Q^{i_1 \dots i_l}| \equiv \frac{k_l}{r} \left( \frac{a}{r} \right)^l, \quad (19.17)$$

где  $k_l = \max_{\{i_1 \dots i_l\}} |Q^{i_1 \dots i_l}| a^{-l}$ . В частности, если плотность заряда ограничена, т. е.  $|\rho(\mathbf{r})| \leq \rho_0$ , то, согласно (19.7),  $k_l < 4\pi \rho_0 a^3/3$ . Сравнивая потенциалы ближайших мультиполей  $\varphi_l$  и  $\varphi_{l+1}$ , замечаем, что если  $k_l$  и  $k_{l+1}$  одного порядка, то

$$|\varphi_{l+1}/\varphi_l| \sim a/r. \quad (19.18)$$

Поэтому, ограничившись первыми не исчезающими членами разложения в (19.6), мы получаем тем лучшее приближение, чем меньше  $a/r$ .

## § 20. ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Среди систем, не имеющих полного электрического заряда, представляет интерес совокупность распределенных по некоторой поверхности  $S$  электрических диполей. Таковую систему можно представить в виде *двойного электрического слоя*, т. е. в виде