Задача 19.4. *Найти с помощью* (19.9) *напряженность* $\mathbf{E}_2$ *электрического поля квадруполя.*

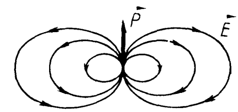

Рис. 19.3

Рассмотрим более подробно квадрупольный член разложения потенциала произвольной ограниченной системы зарядов. Согласно (19.6), имеем

$$\varphi_2=\frac{1}{2}Q^{ik}\partial_i\partial_k\left(\frac{1}{r}\right). \tag{19.14}$$

Учитывая тождества (19.10), к тензору квадрупольного момента Q^{ik} всегда можно добавить единичный тензор вида $\alpha\delta^{ik}$, где α — постоянная. Поэтому при расчете Q^{ik} вместо (19.7) удобно использовать формулу

$$Q^{ik}=\int\rho(\mathbf{r}')\left(x'^i x'^k-\delta^{ik}r'^2/3\right)dV'. \tag{19.15}$$

Построенный тензор $\hat{Q}$ удовлетворяет инвариантному условию

$$Sp\hat{Q}=Q^i_i=0 \tag{19.16}$$

и поэтому имеет не шесть, а только пять независимых компонент в полном согласии с (19.11).

Задача 19.5. *Получить двумерное мультипольное разложение, справедливое для распределений заряда* $\rho(\mathbf{r})$, *не зависящих от одной из координат и сосредоточенных внутри некоторого цилиндра конечного радиуса a. Найти двумерный аналог формулы* (19.9).

На практике, пользуясь мультипольными разложениями (19.2) или (19.6), обычно ограничиваются лишь первыми несколькими членами ряда. Для выяснения точности такого приближения воспользуемся оценкой, вытекающей из (19.6):

$$|\varphi_l|\leqslant r^{-l-1}\max_{\{i_1\dots i_l\}}|Q^{i_1\dots i_l}|\equiv\frac{k_l}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^l, \tag{19.17}$$

где $k_l=\max\limits_{\{i_1\dots i_l\}}|Q^{i_1\dots i_l}|a^{-l}$. В частности, если плотность заряда ограничена, т. е. $|\rho(\mathbf{r})|\leqslant\rho_0$, то, согласно (19.7), $k_l<4\pi\rho_0 a^3/3$. Сравнивая потенциалы ближайших мультиполей φ_l и φ_{l+1}, замечаем, что если k_l и k_{l+1} одного порядка, то

$$|\varphi_{l+1}/\varphi_l|\sim a/r. \tag{19.18}$$

Поэтому, ограничившись первыми неисчезающими членами разложения в (19.6), мы получаем тем лучшее приближение, чем меньше a/r.

§ 20. ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Среди систем, не имеющих полного электрического заряда, представляет интерес совокупность распределенных по некоторой поверхности S электрических диполей. Такую систему можно представить в виде *двойного электрического слоя*, т. е. в виде

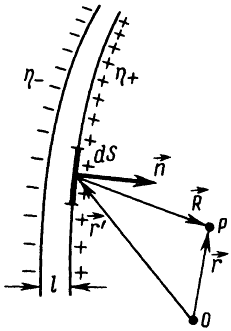

Рис. 20.1

двух близких поверхностей, смещенных одна относительно другой на малое расстояние $l(\mathbf{r})$ и заряженных противоположно. Пусть $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности S, направленный от отрицательных зарядов к положительным. Тогда в точках, соединенных вектором смещения $\mathbf{l}=\mathbf{n}l$, поверхностные плотности заряда отличаются лишь знаком (рис. 20.1): $\eta_+=-\eta_-=\eta$. Поэтому элемент двойного слоя $\mathrm{d}S$ обладает дипольным моментом

$$\mathrm{d}\mathbf{p}=\eta\mathbf{l}\mathrm{d}S \tag{20.1}$$

и потенциал в точке P наблюдения [см. (19.12)] равен

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_S \tau(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{n}'\mathbf{R})}{R^3}\mathrm{d}S', \tag{20.2}$$

где $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$; $\tau=\eta l$ — мощность двойного слоя, численно равная поверхностной плотности дипольного момента.

Замечая, что $\mathrm{d}S'(\mathbf{n}'\mathbf{R})=R^3\mathrm{d}\Omega$, где $\mathrm{d}\Omega$ — элемент телесного угла, под которым видна из точки наблюдения площадка $\mathrm{d}S'$, имеем

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_S \tau\mathrm{d}\Omega. \tag{20.3}$$

В частном случае однородного двойного слоя, когда $\tau=\mathrm{const}$,

$$\varphi=\tau\Omega, \tag{20.4}$$

где Ω — телесный угол, под которым видна из точки наблюдения вся поверхность S. При этом знак Ω положителен, если смотреть со стороны положительных зарядов, и отрицателен, если смотреть с противоположной стороны. Поэтому для однородного двойного слоя при переходе через поверхность потенциал испытывает скачок, равный

$$\varphi_+-\varphi_-\equiv[\varphi]=4\pi\tau. \tag{20.5}$$

Это нетрудно понять, так как в использованном нами дипольном приближении следует считать $l\to 0$, а при этом напряженность электрического поля внутри двойного слоя, согласно (12.2), должна неограниченно расти, если считать τ фиксированным:

$$-(\mathbf{nE})=4\pi\eta=4\pi\tau/l\to\infty. \tag{20.6}$$

Из (20.6) нетрудно получить, что разность потенциалов на слое равна $[\varphi]=-(\mathbf{El})=4\pi\tau$.

Задача 20.1. *Показать, используя* (20.3), *что формула* (20.5) *справедлива и для неоднородного двойного слоя.*