§ 21. ПОЛЕ СВЯЗАННЫХ ЗАРЯДОВ

Рассмотрим поляризованный диэлектрик, заполняющий некоторую ограниченную область V. Зная поляризованность $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, можно определить, согласно (7.1), плотность связанных зарядов $\rho_\mathrm{P} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$, а затем по формуле (17.4) вычислить потенциал создаваемого ими электрического поля:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{\rho'_\mathrm{P}}{R}\,\mathrm{d}V' = -\int\limits_V \frac{\operatorname{div}'\mathbf{P}'}{R}\,\mathrm{d}V', \tag{21.1}$$

где использовано обозначение $\rho'_\mathrm{P} = \rho_\mathrm{P}(\mathbf{r}')$, $\operatorname{div}'\mathbf{P}' = \operatorname{div}\mathbf{P}(\mathbf{r}')$.

Однако пользоваться формулой (21.1) не очень удобно, так как поляризованность $\mathbf{P}$ может испытывать разрывы на границах между различными диэлектриками, а это, как известно, приводит к появлению связанных поверхностных зарядов, учет которых представляет дополнительную трудность.

Задача 21.1. *Показать, что сингулярные части* $\operatorname{div}\mathbf{P}$ *и* $\operatorname{rot}\mathbf{M}$, *обусловленные разрывами векторов* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{M}$ *на некоторой поверхности* S', *заданной уравнением* $f(\mathbf{r})=0$, *имеют вид*

$$\operatorname{div}\mathbf{P}^{\text{синг}} = (\nabla f\, [\mathbf{P}])\,\delta[f(\mathbf{r})], \tag{21.2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{M}^{\text{синг}} = [\nabla f\, [\mathbf{M}]]\,\delta[f(\mathbf{r})], \tag{21.3}$$

где $[\mathbf{P}]$ *и* $[\mathbf{M}]$ — *скачки* $\mathbf{P}$ *и* $\mathbf{M}$ *на* S'.

От указанной трудности можно избавиться, если воспользоваться тождеством

$$\operatorname{div}'\frac{\mathbf{P}}{R} = \frac{1}{R}\operatorname{div}'P' + \frac{(\mathbf{P}'\mathbf{R})}{R^3} \tag{21.4}$$

и показать, что вклад в (21.1) $\operatorname{div}'(\mathbf{P}'/R)$ равен нулю. Нетрудно видеть, что это действительно так, если в нашем случае применима теорема Гаусса—Остроградского, так как согласно ей

$$\int\limits_V \operatorname{div}'\frac{\mathbf{P}'}{R}\,\mathrm{d}V' = \oint\limits_S \frac{(\mathbf{n}'\mathbf{P}')}{R}\,\mathrm{d}S' = 0, \tag{21.5}$$

поскольку на поверхности S, охватывающей объем V и проходящей вне диэлектрика, $\mathbf{P}=0$.

Задача 21.2. *Доказать соотношение* (21.5).

С учетом (21.1) и (21.5) получаем следующее выражение для потенциала связанных зарядов:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_V \frac{(\mathbf{P}'\mathbf{R})}{R^3}\,\mathrm{d}V'. \tag{21.6}$$

Принимая во внимание соотношения (7.5) и (19.12), нетрудно убедиться, что это суммарный потенциал всех диполей из V:

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_{i\in V}\frac{(\mathbf{p}_i\mathbf{R}_i)}{R_i^3}, \quad \mathbf{R}_i=\mathbf{r}-\mathbf{r}_i.$$

В некоторых случаях бывает удобно представить решение (21.6) в несколько ином виде, введя *электрический вектор Герца* $\mathbf{\Pi}$:

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}. \tag{21.7}$$

Нетрудно видеть, что электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ связан с поляризованностью $\mathbf{P}$ простой зависимостью

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})=\int_V\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{21.8}$$

Повторяя вывод условия (12.2) в применении к соотношению $\rho_P=-\operatorname{div}\mathbf{P}$, находим связь поверхностной плотности η_P связанных зарядов со скачком поляризованности $[\mathbf{P}]$ на некоторой поверхности S':

$$\eta_P=(\mathbf{n}\mathbf{P}_1)-(\mathbf{n}\mathbf{P}_2)\equiv-(\mathbf{n}\,[\mathbf{P}]). \tag{21.9}$$

С помощью соотношения (21.9) представляем вклад поверхностных связанных зарядов в общий потенциал в виде

$$\varphi^{\text{пов}}=\int_{S'}\frac{\eta'_P\,dS'}{R}=-\int_{S'}\frac{(\mathbf{n}'\,[\mathbf{P}'])}{R}dS'.$$

Задача 21.3. *Используя соотношения* (21.2) *и* (21.3), *получить граничные условия* (12.8) *с помощью уравнений Максвелла в дифференциальной форме.*

§ 22. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Рассмотрим систему заряженных проводников, помещенных в диэлектрическую среду с проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$. Внутри каждого проводника, обладающего конечной электропроводимостью $\sigma(\mathbf{r})$, справедлив закон Ома $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, из которого следует, что в статическом случае, когда $\mathbf{j}=0$, внутри проводника

$$\mathbf{E}=0. \tag{22.1}$$

Учитывая потенциальность электрического поля, т. е. полагая $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$, выводим, что внутри проводника и на его поверхности потенциал φ постоянен:

$$\varphi=\text{const}. \tag{22.2}$$

Кроме того, заряды в проводниках располагаются только на их поверхностях, поскольку объемная плотность заряда, согласно (22.1), исчезает:

$$4\pi\rho=\operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{22.3}$$

В то же время в диэлектрике в соответствии с (7.7) потенциал