убедиться, что это суммарный потенциал всех диполей из V:

$$\varphi(\mathbf{r})=\sum_{i\in V}\frac{(\mathbf{p}_i\mathbf{R}_i)}{R_i^3},\quad \mathbf{R}_i=\mathbf{r}-\mathbf{r}_i.$$

В некоторых случаях бывает удобно представить решение (21.6) в несколько ином виде, введя *электрический вектор Герца* $\mathbf{\Pi}$:

$$\varphi=-\operatorname{div}\mathbf{\Pi}. \tag{21.7}$$

Нетрудно видеть, что электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$ связан с поляризованностью $\mathbf{P}$ простой зависимостью

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})=\int_V\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{21.8}$$

Повторяя вывод условия (12.2) в применении к соотношению $\rho_P=-\operatorname{div}\mathbf{P}$, находим связь поверхностной плотности η_P связанных зарядов со скачком поляризованности $[\mathbf{P}]$ на некоторой поверхности S':

$$\eta_P=(\mathbf{n}\mathbf{P}_1)-(\mathbf{n}\mathbf{P}_2)\equiv-(\mathbf{n}\,[\mathbf{P}]). \tag{21.9}$$

С помощью соотношения (21.9) представляем вклад поверхностных связанных зарядов в общий потенциал в виде

$$\varphi^{\text{пов}}=\int_{S'}\frac{\eta'_P\,dS'}{R}=-\int_{S'}\frac{(\mathbf{n}'\,[\mathbf{P}'])}{R}\,dS'.$$

Задача 21.3. *Используя соотношения* (21.2) *и* (21.3), *получить граничные условия* (12.8) *с помощью уравнений Максвелла в дифференциальной форме.*

§ 22. ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Рассмотрим систему заряженных проводников, помещенных в диэлектрическую среду с проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$. Внутри каждого проводника, обладающего конечной электропроводимостью $\sigma(\mathbf{r})$, справедлив закон Ома $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, из которого следует, что в статическом случае, когда $\mathbf{j}=0$, внутри проводника

$$\mathbf{E}=0. \tag{22.1}$$

Учитывая потенциальность электрического поля, т. е. полагая $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$, выводим, что внутри проводника и на его поверхности потенциал φ постоянен:

$$\varphi=\text{const}. \tag{22.2}$$

Кроме того, заряды в проводниках располагаются только на их поверхностях, поскольку объемная плотность заряда, согласно (22.1), исчезает:

$$4\pi\rho=\operatorname{div}\mathbf{E}=0. \tag{22.3}$$

В то же время в диэлектрике в соответствии с (7.7) потенциал

φ должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho \tag{22.4}$$

и граничным условиям (12.8):

$$(\mathbf{n}\mathbf{D}_2) - (\mathbf{n}\mathbf{D}_1) = 4\pi\eta, \quad [\mathbf{n}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0. \tag{22.5}$$

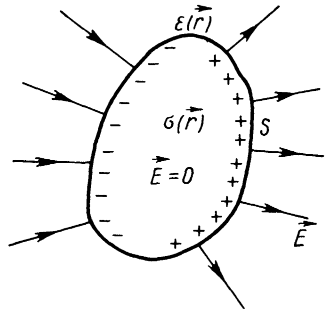

Рис. 22.1

Но последнее условие вытекает из непрерывности потенциала на границе раздела S*. В самом деле, если функция $f(\mathbf{r}) = \varphi_2 - \varphi_1$ обращается в нуль на поверхности S, то уравнение последней есть, очевидно, $f(\mathbf{r}) = 0$. Поэтому с учетом выражения для нормали $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$ условие $[\mathbf{n}\nabla(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0$ удовлетворяется тождественно.

Рассмотрим теперь оставшееся условие (22.5) на границе S проводника с диэлектриком (рис. 22.1). Поскольку в проводнике $\mathbf{D} = \mathbf{E} = 0$, в диэлектрике вблизи границы с проводником выполняется равенство

$$(\mathbf{n}\mathbf{D}) = -\varepsilon(\mathbf{n}\nabla\varphi) = 4\pi\eta, \tag{22.6}$$

позволяющее записать полный заряд проводника в виде

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \varepsilon(\mathbf{n}\nabla)\varphi \, dS. \tag{22.7}$$

Итак, граничные условия, отбирающие нужные решения уравнения (22.4), имеют вид:

а) на поверхностях проводников S_i $(i = 1, 2, \ldots)$, несущих заданные заряды Q_i или поддерживаемых при заданных потенциалах φ_i,

$$\varphi = \varphi_i = \text{const}, \quad Q_i = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_i} \varepsilon(\mathbf{n}\nabla)\varphi \, dS; \tag{22.8}$$

б) на граничных поверхностях между диэлектриками при отсутствии свободных поверхностных зарядов

$$[\varphi] = 0, \quad (\mathbf{n}[\varepsilon\nabla\varphi]) = 0. \tag{22.9}$$

При этом возможны две постановки основной задачи:

1) заданы потенциалы проводников φ_i, найти их заряды Q_i и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в диэлектрике;

2) заданы заряды проводников Q_i, найти их потенциалы φ_i и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в диэлектрике.

Докажем единственность решения этих задач. Будем исходить из противного, предположив, что имеется два разных решения

---

* Непрерывность потенциала необходима для конечности напряженности **E** поля.

φ_1 и φ_2. Тогда их разность $u=\varphi_1-\varphi_2$, согласно (22.4), удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div}(\varepsilon u \nabla u)=\varepsilon(\nabla u)^2. \tag{22.10}$$

Интегрируя (22.10) по объему V диэлектрика, ограниченному поверхностями S_i проводников, находим с помощью теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int_V \varepsilon(\nabla u)^2\,\mathrm{d}V=\sum_i \oint_{S_i} u\varepsilon(\mathbf{n}\nabla)u\,\mathrm{d}S. \tag{22.11}$$

Замечая, что для первой постановки задачи на поверхностях S_i будет $u=0$, а для второй постановки $u=\text{const}$, но в то же время $\oint_{S_i}\varepsilon(\mathbf{n}\nabla)u\,\mathrm{d}S=0$, убеждаемся, что правая часть в (22.11) исчезает. Ввиду положительности ε это возможно только при условии, что $\nabla u\equiv 0$, т. е. напряженность $\mathbf{E}$ поля определяется однозначно, а потенциалы φ_i и φ — с точностью до общей постоянной.

Задача 22.1. *Верно ли, что поверхностная плотность заряда на проводниках максимальна в точках наибольшей кривизны поверхности? Показать, что вблизи проводника*

$$(\mathbf{n}\nabla)\ln(\mathbf{nD})=-2H, \tag{22.12}$$

где $\mathbf{n}$ *— нормаль к поверхности,* H *— ее средняя кривизна.*

Задача 22.2. *Показать, что замкнутая проводящая оболочка является экраном от внешних электрических полей, а в случе ее заземления, т. е. при ее контакте с проводником очень больших размеров,— еще и от внутренних. Показать также, что поле вне оболочки отсутствует, если она охватывает нейтральную систему зарядов.*

Задача 22.3. *Внутри металла вырезана сферическая полость радиуса а. Верхняя и нижняя ее половины заполнены диэлектриком с проницаемостями* ε_1 *и* ε_2 *соответственно. В центре полости помещен точечный диполь с моментом* $\mathbf{p}$. *Найти потенциал* φ *в диэлектрике и распределение заряда на поверхности полости. Рассмотреть случаи ориентации диполя вдоль плоскости раздела сред и перпендикулярно ей. Рассмотреть также двумерный вариант задачи, т. е. цилиндрическую полость и двумерный диполь.*

§ 23. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Получим выражение для энергии электростатического поля, создаваемого произвольной ограниченной системой зарядов, находящихся в диэлектрической среде. Выделим произвольную, но достаточно большую область V_0, включающую систему зарядов и ограниченную некоторой замкнутой поверхностью S. Тогда энергия электростатического поля, содержащаяся в V_0, согласно (14.7), равна

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{8\pi}\int_{V_0}(\mathbf{DE})\,\mathrm{d}V. \tag{23.1}$$