φ_1 и φ_2. Тогда их разность $u=\varphi_1-\varphi_2$, согласно (22.4), удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div}(\varepsilon u \nabla u)=\varepsilon(\nabla u)^2. \tag{22.10}$$

Интегрируя (22.10) по объему V диэлектрика, ограниченному поверхностями S_i проводников, находим с помощью теоремы Гаусса — Остроградского

$$\int_V \varepsilon(\nabla u)^2 \, \mathrm{d}V=\sum_i \oint_{S_i} u\varepsilon(\mathbf{n}\nabla) u \, \mathrm{d}S. \tag{22.11}$$

Замечая, что для первой постановки задачи на поверхностях S_i будет $u=0$, а для второй постановки $u=\mathrm{const}$, но в то же время $\oint_{S_i} \varepsilon(\mathbf{n}\nabla) u \, \mathrm{d}S=0$, убеждаемся, что правая часть в (22.11) исчезает. Ввиду положительности ε это возможно только при условии, что $\nabla u \equiv 0$, т. е. напряженность $\mathbf{E}$ поля определяется однозначно, а потенциалы φ_i и φ — с точностью до общей постоянной.

Задача 22.1. *Верно ли, что поверхностная плотность заряда на проводниках максимальна в точках наибольшей кривизны поверхности? Показать, что вблизи проводника*

$$(\mathbf{n}\nabla)\ln(\mathbf{nD})=-2H, \tag{22.12}$$

где $\mathbf{n}$ — *нормаль к поверхности,* H — *ее средняя кривизна.*

Задача 22.2. *Показать, что замкнутая проводящая оболочка является экраном от внешних электрических полей, а в случе ее заземления, т. е. при ее контакте с проводником очень больших размеров,— еще и от внутренних. Показать также, что поле вне оболочки отсутствует, если она охватывает нейтральную систему зарядов.*

Задача 22.3. *Внутри металла вырезана сферическая полость радиуса а. Верхняя и нижняя ее половины заполнены диэлектриком с проницаемостями* ε_1 *и* ε_2 *соответственно. В центре полости помещен точечный диполь с моментом* $\mathbf{p}$. *Найти потенциал* φ *в диэлектрике и распределение заряда на поверхности полости. Рассмотреть случаи ориентации диполя вдоль плоскости раздела сред и перпендикулярно ей. Рассмотреть также двумерный вариант задачи, т. е. цилиндрическую полость и двумерный диполь.*

§ 23. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Получим выражение для энергии электростатического поля, создаваемого произвольной ограниченной системой зарядов, находящихся в диэлектрической среде. Выделим произвольную, но достаточно большую область V_0, включающую систему зарядов и ограниченную некоторой замкнутой поверхностью S. Тогда энергия электростатического поля, содержащаяся в V_0, согласно (14.7), равна

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{8\pi}\int_{V_0} (\mathbf{DE}) \, \mathrm{d}V. \tag{23.1}$$

Полагая $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$ и интегрируя в (23.1) по частям, находим

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_0}\varphi\operatorname{div}\mathbf{D}\,\mathrm{d}V-\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S}\varphi(\mathbf{nD})\,\mathrm{d}S. \tag{23.2}$$

Будем теперь считать поверхность S сферой бесконечно большого радиуса R. Тогда при $R\to\infty$ потенциал φ убывает как $Q/(\varepsilon_\infty R)$, где ε_∞ — диэлектрическая проницаемость среды на бесконечности, а Q — полный свободный заряд системы, равный по теореме Гаусса

$$Q=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S}(\mathbf{nD})\,\mathrm{d}S.$$

Все это позволяет получить следующую оценку для поверхностного интеграла в (23.2):

$$\frac{1}{8\pi}\left|\oint\limits_{S}\varphi(\mathbf{nD})\,\mathrm{d}S\right|=\frac{Q^2}{2\varepsilon_\infty R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Таким образом, при $R\to\infty$ (23.2) упрощается и с учетом (7.7) принимает вид

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int\limits_{V}\rho\varphi\,\mathrm{d}V, \tag{23.3}$$

где V — область, занятая свободными зарядами.

Учтем теперь, что потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\varphi=-4\pi(\rho+\rho_P)$ и поэтому может быть записан в форме

$$\varphi(\mathbf{r})=\int\limits_{V'}\frac{\rho'+\rho'_P}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V', \tag{23.4}$$

где V' — область, занятая свободными и связанными зарядами. Подставляя (23.4) в (23.3), получаем выражение для энергии электростатического поля в среде:

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int\limits_{V}\int\limits_{V'}\frac{\rho(\rho'+\rho'_P)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V\,\mathrm{d}V'. \tag{23.5}$$

В частном случае системы зарядов в вакууме $(\rho_P\equiv 0)$ из (23.5) получается обычно используемое симметричное выражение

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\int\limits_{V}\int\limits_{V}\frac{\rho\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V\,\mathrm{d}V'. \tag{23.6}$$

Если заряды считать точечными, то (23.6) будет содержать расходящиеся интегралы, отвечающие *собственным энергиям* отдельных зарядов. В самом деле, если заряд e равномерно распределен по поверхности шарика радиуса a, то энергия электростатического поля, очевидно, равна

$$W_e^{\text{соб}} = e^2/(2a) \tag{23.7}$$

и при $a \to 0$ оказывается бесконечной. Поэтому при рассмотрении системы точечных зарядов из (23.6) обычно исключают бесконечную собственную энергию, оставляя лишь энергию взаимодействия разных зарядов. Нетрудно видеть, что энергия поля в результате такой операции принимает вид

$$W'_e = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\frac{e_i e_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \varphi_i, \tag{23.8}$$

где φ_i — потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме i-го, в точке нахождения последнего.

Задача 23.1. *Используя формулу* (23.8), *показать, что система зарядов не может находиться в устойчивом равновесии только под действием электростатических сил (теорема Ирншоу).*

Изучим теперь более подробно вклад среды в электростатическую энергию. Используя связь $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, его можно записать в виде

$$W_P = \frac{1}{2}\int (\mathbf{EP})\,\mathrm{d}V. \tag{23.9}$$

Чтобы выяснить физический смысл этой величины, воспользуемся представлением поляризованности $\mathbf{P}$ в форме (7.5):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i^+ \mathbf{q}_i, \tag{23.10}$$

где $|\mathbf{q}_i|$ — эффективное расстояние между зарядами $e_i^{\pm}$ в i-й молекуле-диполе. Рассматривая молекулы как квазиупруго связанные заряды и вводя эффективный коэффициент упругости k, условие равновесия упругих и электрических сил можно записать в виде $e_i^+ \mathbf{E}_i = k\mathbf{q}_i$, откуда вытекает следующее представление для энергии (23.9):

$$W_P = \frac{1}{2}\sum_i e_i^+ (\mathbf{q}_i \mathbf{E}_i) = \frac{1}{2}\sum_i k q_i^2. \tag{23.11}$$

Таким образом, энергию электростатического поля, запасенную в диэлектрике, можно интерпретировать как потенциальную энергию растянутых упругих молекул.

Однако даже без привлечения каких-либо модельных представлений о молекулах-диполях, в предположении лишь линейности связи $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \varkappa\mathbf{E}$, можно показать, что (23.9) представляет собой работу, которую необходимо затратить, чтобы создать в среде поляризацию **P**. В самом деле, используя (23.10) и считая, что напряженность **E** поля мало изменяется в пределах ячейки ΔV, элементарную работу электрического поля над связанными зарядами среды можно записать в виде

$$\delta W_e = \sum_i e_i \left(\mathbf{E}_i \delta \mathbf{r}_i \right) = \int \left(\mathbf{E} \delta \mathbf{P} \right) dV, \tag{23.12}$$

откуда в предположении линейной зависимости $\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}$ и вытекает (23.9). Таким образом, можно с уверенностью сказать, что выражение (23.9) представляет собой энергию, запасенную в диэлектрике при создании в нем электрического поля **E**.

Задача 23.2. *Показать, что если в поле заданной системы зарядов внести нейтральный диэлектрический образец с проницаемостью, отличающейся от проницаемости среды на малую величину* $\delta\varepsilon$, *то в первом приближении энергия системы изменится на*

$$\delta W_e = -\frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon \, dV. \tag{23.13}$$

Показать также, что при внесении незаряженного проводника энергия системы уменьшится.

Энергия электростатического поля данной системы, очевидно, зависит от ее геометрических свойств, т. е. от некоторых обобщенных координат q_1, q_2, ... Поэтому знание функции $W_e(q_1, q_2, ...)$ позволяет вычислить обобщенные силы F_i, действующие между элементами системы. Действительно, по принципу возможных перемещений,

$$\delta W_e = -\sum_i F_i \delta q_i, \tag{23.14}$$

откуда

$$F_i = -\partial W_e / \partial q_i. \tag{23.15}$$

Задача 23.3. *Вычислить силу* **F** *и момент сил* **L**, *испытываемые диполем* **p** *в поле другого диполя* **p**′, *расположенного на расстоянии a от первого.*

§ 24. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Так как в проводниках статический заряд распределен только по поверхностям, потенциал вдоль которых не меняется, то энергия такой системы [см. (23.3)] равна

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \oint\limits_{S_i} \varphi\eta \, dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint\limits_{S_i} \eta \, dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i, \tag{24.1}$$

где φ_i и Q_i — соответственно потенциал и заряд i-го проводника. Решив основную задачу электростатики, т. е. найдя распределение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ в окружающем пространстве, всегда можно,