собой работу, которую необходимо затратить, чтобы создать в среде поляризацию **P**. В самом деле, используя (23.10) и считая, что напряженность **E** поля мало изменяется в пределах ячейки ΔV, элементарную работу электрического поля над связанными зарядами среды можно записать в виде

$$\delta W_e = \sum_i e_i (\mathbf{E}_i \delta \mathbf{r}_i) = \int (\mathbf{E} \delta \mathbf{P}) \, dV, \qquad (23.12)$$

откуда в предположении линейной зависимости $\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}$ и вытекает (23.9). Таким образом, можно с уверенностью сказать, что выражение (23.9) представляет собой энергию, запасенную в диэлектрике при создании в нем электрического поля **E**.

Задача 23.2. *Показать, что если в поле заданной системы зарядов внести нейтральный диэлектрический образец с проницаемостью, отличающейся от проницаемости среды на малую величину $\delta\varepsilon$, то в первом приближении энергия системы изменится на*

$$\delta W_e = -\frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon \, dV. \qquad (23.13)$$

Показать также, что при внесении незаряженного проводника энергия системы уменьшится.

Энергия электростатического поля данной системы, очевидно, зависит от ее геометрических свойств, т. е. от некоторых обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots$. Поэтому знание функции $W_e(q_1, q_2, \ldots)$ позволяет вычислить обобщенные силы F_i, действующие между элементами системы. Действительно, по принципу возможных перемещений,

$$\delta W_e = -\sum_i F_i \delta q_i, \qquad (23.14)$$

откуда

$$F_i = -\partial W_e / \partial q_i. \qquad (23.15)$$

Задача 23.3. *Вычислить силу* **F** *и момент сил* **L**, *испытываемые диполем* **p** *в поле другого диполя* **p**′, *расположенного на расстоянии* a *от первого.*

§ 24. ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Так как в проводниках статический заряд распределен только по поверхностям, потенциал вдоль которых не меняется, то энергия такой системы [см. (23.3)] равна

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} \varphi\eta \, dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \eta \, dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i, \qquad (24.1)$$

где φ_i и Q_i — соответственно потенциал и заряд i-го проводника. Решив основную задачу электростатики, т. е. найдя распределение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ в окружающем пространстве, всегда можно, согласно (22.7), вычислить заряды Q_i проводников. В то же время, по теореме единственности (см. § 22), функция $\varphi(\mathbf{r})$ однозначно определяется потенциалами проводников φ_i. Поэтому и заряды проводников Q_i — некоторые однозначные функции всех потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Из-за линейности уравнений поля (22.4) эти функции могут быть только линейными. Поэтому должна существовать связь вида

$$Q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k, \tag{24.2}$$

и обратно:

$$\varphi_i = \sum_k S_{ik}Q_k. \tag{24.3}$$

Постоянные коэффициенты C_{ik} называются *емкостными коэффициентами* системы проводников, а S_{ik} — *потенциальными коэффициентами*. При этом коэффициенты C_{ii} называют *собственными емкостями*, а C_{ik} при $i \neq k$ — *коэффициентами взаимной емкости* или *коэффициентами электростатической индукции*.

Задача 24.1. *Показать, что емкостные коэффициенты C_{ik} могут быть представлены в виде*

$$C_{ii} = \sum_{k \neq i} a_{ik} + a_{i0}, \quad C_{ik} = -a_{ik} \quad (i \neq k), \tag{24.4}$$

где a_{ik}, $i \neq k$, определяются конфигурацией векторных линий поля $\mathbf{D}$. *В частности, если среда характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и векторная трубка, начинающаяся с площадки $\mathrm{d}S_i$ i-го проводника, имеет нормальное сечение $\mathrm{d}S(\mathbf{r}) = \mathrm{d}S_i/f(\mathbf{r})$, то*

$$a_{ik} = \int \Big[4\pi \int_{\mathbf{D}_{ik}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\varepsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) f(\mathbf{r})\,\mathrm{d}l\Big]^{-1} \mathrm{d}S_i, \tag{24.5}$$

где линейный интеграл берется вдоль векторной линии $\mathbf{D} = \tau D$, а поверхностный — по той части поверхности i-го проводника, с которой начинаются линии $\mathbf{D}_{ik}$, связывающие i-й и k-й проводники; a_{i0} представляет собой вклад линий $\mathbf{D}$, уходящих в бесконечность.

Из (24.5) следует, что $a_{ik} > 0$, поэтому [см. (24.4)] $C_{ii} > 0$, тогда как $C_{ik} < 0$, $i \neq k$. Последнее обстоятельство является выражением того простого факта, что на проводниках всегда наводятся заряды противоположного знака. В самом деле, если заземлить все проводники, кроме k-го, то наведенный на i-м проводнике заряд [см. (24.2)] равен $Q_i = C_{ik}\varphi_k$. Но если $\varphi_k > 0$, то очевидно, что собственный заряд k-го проводника $Q_k > 0$, тогда как наведенные заряды $Q_i < 0$ при $i \neq k$.

Наконец, из (24.5) с учетом связи $f\mathrm{d}S = \mathrm{d}S_i$ вытекает, что коэффициенты a_{ik} симметричны, т. е. $a_{ik} = a_{ki}$. Поэтому симметричными являются и емкостные коэффициенты:

$$C_{ik} = C_{ki} \tag{24.6}$$

(соотношение взаимности). Его часто формулируют в виде теоремы взаимности Грина, смысл которой состоит в следующем.

Рассмотрим два состояния одной и той же системы проводников. Пусть в одном из них заряды и потенциалы проводников Q_i, φ_i, а в другом — Q'_i, φ'_i. Тогда, используя (24.2) и (24.6), имеем

$$\sum_i Q'_i\varphi_i=\sum_{i,k} C_{ik}\varphi'_k\varphi_i=\sum_{i,k} C_{ki}\varphi'_k\varphi_i=\sum_k Q_k\varphi'_k. \tag{24.7}$$

Это и есть *теорема взаимности Грина.*

Для одиночного проводника

$$Q=C\varphi, \tag{24.8}$$

где C — *собственная емкость* проводника. В частности, для металлического шарика радиуса a, находящегося в однородном диэлектрике с проницаемостью ε и несущего заряд Q, получаем $\varphi=Q/(\varepsilon a)$, т. е. $C=\varepsilon a$. В случае двух проводников, несущих равные и противоположные заряды $Q_1=-Q_2=Q$, из (24.2)

$$Q=C(\varphi_1-\varphi_2). \tag{24.9}$$

Такая система проводников обычно называется *конденсатором*, а коэффициент C — его *емкостью*.

Задача 24.2. *Показать, что емкость конденсатора выражается через емкостные коэффициенты по формуле*

$$C=(C_{11}C_{22}-C_{12}^2)/(C_{11}+2C_{12}+C_{22}). \tag{24.10}$$

Если обкладки конденсатора расположены очень близко друг от друга, то в соответствии с (24.5) имеем $a_{12}\gg a_{10}$ и $a_{12}\gg a_{20}$, так что приближенно можно считать $C_{11}C_{22}-C_{12}^2\approx a_{12}(a_{10}+a_{20})$, тогда как $C_{11}+2C_{12}+C_{22}=a_{10}+a_{20}$. Таким образом, согласно (24.10), емкость конденсатора примерно равна

$$C\approx a_{12}=|C_{12}|.$$

Задача 24.3. *Два одинаковых проводящих тела, одно из которых имеет заряд Q, далеко отстоят друг от друга. При помощи первоначально незаряженного третьего проводника заряд переносится с одного тела на другое. Какими будут окончательные заряды всех трех проводников после многократного повторения операции переноса, если при первом контакте заряд Q первого тела уменьшился на $1/n$?*

Выразим теперь энергию системы заряженных проводников через их потенциалы или заряды. Подставляя в (24.1) последовательно (24.2) и (24.3), находим

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i,k} C_{ik}\varphi_i\varphi_k=\frac{1}{2}\sum_{i,k} S_{ik}Q_iQ_k. \tag{24.11}$$

Отсюда следует еще одно явно симметричное представление для емкостных и потенциальных коэффициентов:

$$C_{ik}=\frac{\partial^2 W_e}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k},\quad S_{ik}=\frac{\partial^2 W_e}{\partial Q_i\partial Q_k}. \tag{24.12}$$

Из условия положительности квадратичной формы (24.11) получаем полезные неравенства

$$C_{ii}>0;\quad C_{ii}C_{kk}-C_{ik}^2>0,\quad i\neq k. \tag{24.13}$$

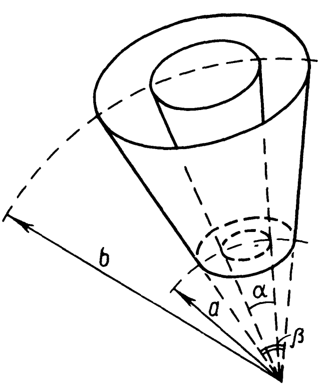

Рис. 24.1

Задача 24.4. *Найти емкость конденсатора, образованного двумя большими плоскими пластинами площади S, наклоненными под углом β друг к другу. Минимальное и максимальное расстояния между пластинами d_1 и d_2. Краевым эффектом пренебречь.*

Задача 24.5. *Как изменится емкость сферического конденсатора с радиусами оболочек a и $b>a$ при малой деформации внешней оболочки? Как изменится емкость при малом растяжении конденсатора на расстояние d в одном из его центральных сечений?*

Задача 24.6. *Найти емкость конденсатора, обкладки которого представляют собой усеченные конические поверхности с углами раствора α и $\beta>\alpha$, вложенные одна в другую* (рис. 24.1). *Радиусы усечения a и $b \gg a$. Краевым эффектом пренебречь.*

Задача 24.7. *Показать, что распределение поверхностного заряда на проводниках таково, что энергия электростатического поля минимальна (теорема В. Томсона).*

§ 25. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Можно выделить особый класс задач электростатики, относящихся к случаю, когда поле на бесконечности не исчезает, а стремится к некоторому постоянному однородному полю $\mathbf{E}_0$. Рассмотрим два простейших примера задач такого рода, когда во внешнем поле $\mathbf{E}_0$ находятся проводящий либо диэлектрический шары.

1. Поместим начало координат в центр проводящего шара радиуса a и выберем сферические координаты (направление $\mathbf{E}_0$ соответствует $\vartheta=0$). Для простоты заземлим шар, тогда внутри него потенциал $\varphi=0$. Вне шара при $r\to\infty$ потенциал совпадает с потенциалом внешнего поля $-E_0 r\cos\vartheta$. Чтобы удовлетворить граничному условию $\varphi(r=a)=0$, из общего решения (16.11) уравнения Лапласа необходимо выбрать часть, пропорциональную $\cos\vartheta$:

$$\varphi=E_0 r\cos\vartheta\left(a^3/r^3-1\right). \tag{25.1}$$

Из полученного решения видно, что во внешнем поле $\mathbf{E}_0$ шар поляризуется и приобретает дипольный момент $\mathbf{p}=\mathbf{E}_0 a^3$. При этом поверхностная плотность заряда на нем оказывается равной (рис. 25.1)

$$\eta=-\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{3}{4\pi}E_0\cos\vartheta. \tag{25.2}$$

2. Рассмотрим диэлектрический шар с проницаемостью ε во внешнем поле $\mathbf{E}_0$. По аналогии с предыдущим случаем потенциал вне шара (область *1*) будем искать в виде

$$\varphi_1=-E_0 r\cos\vartheta+\left(C_1/r^2\right)\cos\vartheta, \tag{25.3}$$

тогда как внутри шара (область *2*) дипольный член должен отсутствовать, поскольку он расходится при $r=0$, а поле внутри шара должно быть конечным. Поэтому полагаем