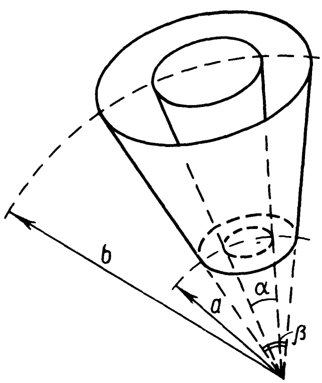

Рис. 24.1

Задача 24.4. *Найти емкость конденсатора, образованного двумя большими плоскими пластинами площади S, наклоненными под углом β друг к другу. Минимальное и максимальное расстояния между пластинами d_1 и d_2. Краевым эффектом пренебречь.*

Задача 24.5. *Как изменится емкость сферического конденсатора с радиусами оболочек a и $b>a$ при малой деформации внешней оболочки? Как изменится емкость при малом растяжении конденсатора на расстояние d в одном из его центральных сечений?*

Задача 24.6. *Найти емкость конденсатора, обкладки которого представляют собой усеченные конические поверхности с углами раствора α и $\beta>\alpha$, вложенные одна в другую* (рис. 24.1). *Радиусы усечения a и $b\gg a$. Краевым эффектом пренебречь.*

Задача 24.7. *Показать, что распределение поверхностного заряда на проводниках таково, что энергия электростатического поля минимальна (теорема В. Томсона).*

§ 25. ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Можно выделить особый класс задач электростатики, относящихся к случаю, когда поле на бесконечности не исчезает, а стремится к некоторому постоянному однородному полю $\mathbf{E}_0$. Рассмотрим два простейших примера задач такого рода, когда во внешнем поле $\mathbf{E}_0$ находятся проводящий либо диэлектрический шары.

1. Поместим начало координат в центр проводящего шара радиуса a и выберем сферические координаты (направление $\mathbf{E}_0$ соответствует $\vartheta=0$). Для простоты заземлим шар, тогда внутри него потенциал $\varphi=0$. Вне шара при $r\to\infty$ потенциал совпадает с потенциалом внешнего поля $-E_0 r\cos\vartheta$. Чтобы удовлетворить граничному условию $\varphi(r=a)=0$, из общего решения (16.11) уравнения Лапласа необходимо выбрать часть, пропорциональную $\cos\vartheta$:

$$\varphi=E_0 r\cos\vartheta\left(a^3/r^3-1\right). \tag{25.1}$$

Из полученного решения видно, что во внешнем поле $\mathbf{E}_0$ шар поляризуется и приобретает дипольный момент $\mathbf{p}=\mathbf{E}_0 a^3$. При этом поверхностная плотность заряда на нем оказывается равной (рис. 25.1)

$$\eta=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\frac{3}{4\pi}E_0\cos\vartheta. \tag{25.2}$$

2. Рассмотрим диэлектрический шар с проницаемостью ε во внешнем поле $\mathbf{E}_0$. По аналогии с предыдущим случаем потенциал вне шара (область *1*) будем искать в виде

$$\varphi_1=-E_0 r\cos\vartheta+\left(C_1/r^2\right)\cos\vartheta, \tag{25.3}$$

тогда как внутри шара (область *2*) дипольный член должен отсутствовать, поскольку он расходится при $r=0$, а поле внутри шара должно быть конечным. Поэтому полагаем

$$\varphi_2 = C_2 r \cos\vartheta. \qquad (25.4)$$

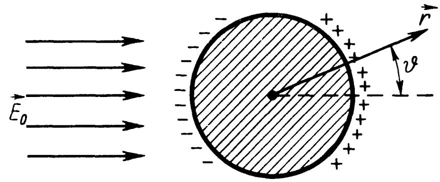

Рис. 25.1

Подставляя потенциалы (25.3) и (25.4) в граничные условия (22.9), получаем систему уравнений для определения неизвестных постоянных C_1 и C_2: $-E_0 a + C_1/a^2 = C_2 a$, $E_0 + 2C_1/a^3 = -\varepsilon C_2$. Разрешая ее, находим $C_1 = a^3 E_0(\varepsilon-1)/(\varepsilon+2)$, $C_2 = -3E_0/(\varepsilon+2)$, что соответствует следующему виду потенциалов:

$$\varphi_1 = E_0 r\cos\vartheta\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{a^3}{r^3} - 1\right), \quad \varphi_2 = -\frac{3E_0}{\varepsilon+2} r\cos\vartheta. \qquad (25.5)$$

Анализируя решение (25.5), убеждаемся, что напряженность поля внутри шара постоянна и равна

$$\mathbf{E}_2 = 3\mathbf{E}_0/(\varepsilon+2). \qquad (25.6)$$

Это означает, что шар имеет постоянную поляризованность

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E}_2 = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\mathbf{E}_0, \qquad (25.7)$$

которая соответствует дипольному моменту шара

$$\mathbf{p} = a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\mathbf{E}_0 \qquad (25.8)$$

и поверхностной плотности связанных зарядов

$$\eta_p = (\mathbf{nP}) = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0\cos\vartheta. \qquad (25.9)$$

Обратим внимание на то, что в пределе $\varepsilon\to\infty$ решение задачи с диэлектрическим шаром переходит в соответствующее решение задачи с проводящим шаром. Физически это объясняется тем, что при $\varepsilon\to\infty$ связанные заряды становятся свободными и диэлектрик ведет себя как проводник.

Задача 25.1. *Проводящий шар радиуса a окружен диэлектрической оболочкой радиуса b с проницаемостью ε и помещен в постоянное внешнее поле $\mathbf{E}_0$. Найти потенциал φ во всех областях и поверхностную плотность заряда на шаре.*

Задача 25.2. *Бесконечный проводящий цилиндр радиуса a помещен на плоской границе двух диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. В среде с проницаемостью ε_1 задано постоянное поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$, перпендикулярной плоскости раздела* (рис. 25.2). *Найти потенциал φ во всех областях и распределение заряда на цилиндре.*

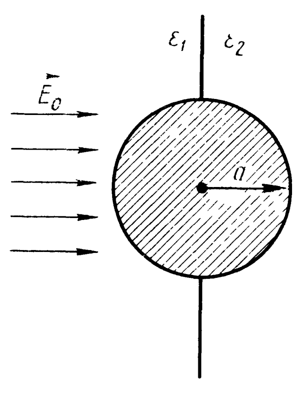

Рис. 25.2