§ 26. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Изучим два популярных метода решения задач электростатики, основанные на использовании некоторых свойств симметрии исходных уравнений и граничных условий.

Метод отражений применяется в тех случаях, когда границы раздела сред плоские. Проще всего понять этот метод, рассмотрев случай проводящего полупространства. Пусть плоскость $z=0$ разделяет проводник $(z<0)$ и диэлектрик $(z>0)$ с проницаемостью ε, в котором задано распределение свободных зарядов $\rho(\mathbf{r})$. Для нахождения потенциала φ в диэлектрике необходимо решить уравнение (22.4) с граничным условием $\varphi(z=0)=0$. Предварительно произведем симметричное продолжение функции $\varepsilon(\mathbf{r})$ на область $z<0$, т. е. положим

$$\varepsilon_c(\mathbf{r})\equiv\varepsilon(x,\ y,\ |z|). \tag{26.1}$$

Допустим, что известно некоторое решение φ_c уравнения

$$\operatorname{div}(\varepsilon_c\nabla\varphi_c)=-4\pi\rho \tag{26.2}$$

во всем пространстве (обратим внимание на то, что $\rho=0$ при $z<0$). Рассмотрим функцию $\varphi'=-\varphi_c(x,\ y,\ -z)$. Используя свойство инвариантности оператора $\operatorname{div}(\varepsilon_c\nabla)$ относительно отражения $z\to -z$, нетрудно убедиться, что φ' удовлетворяет однородному уравнению

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi')=0 \tag{26.3}$$

в области $z>0$. Очевидно, что φ' — потенциал, созданный отраженными источниками с плотностью $\rho'=-\rho(x,\ y,\ -z)$. Таким образом, решением исходной задачи является функция

$$\varphi=\varphi_c(x,\ y,\ z)-\varphi_c(x,\ y,\ -z). \tag{26.4}$$

Физический смысл решения (26.4) ясен из самого способа его построения: потенциалы φ_c и φ' создаются соответственно распределением заряда ρ при отсутствии проводящей среды и поверхностными зарядами, сосредоточенными на границе раздела $z=0$.

В качестве наглядного примера, иллюстрирующего метод отражений, рассмотрим следующую задачу. Пусть плоскость $z=0$ разделяет два диэлектрика с проницаемостями $\varepsilon_1\,(z<0)$ и $\varepsilon_2\,(z>0)$. В точке $A(0,\ 0,\ a)$ в области $z>0$ расположен точечный заряд e. Используя метод отражений, потенциал поля будем искать в виде (рис. 26.1)

$$\varphi_1=e''/(\varepsilon_1 r_2),\quad \varphi_2=e/(\varepsilon_2 r_2)+e'/(\varepsilon_2 r_1). \tag{26.5}$$

Иначе говоря, кроме истинного заряда e мы взяли еще два фиктивных заряда e' и e'', помещенных в симметричные точки. С помощью этих фиктивных зарядов как раз и описывается поле поверхностных зарядов, сосредоточенных на границе раздела $z=0$. Подставляя (26.5) в граничные условия (22.9), получаем систему уравнений для определения неизвестных постоянных e' и e'':

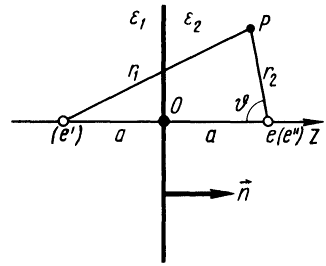

Рис. 26.1

$$e''/\varepsilon_1=(e+e')/\varepsilon_2, \quad e''=e-e'.$$

Решение этой системы имеет вид

$$e'=e(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2), \quad e''=2e\varepsilon_1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2). \tag{26.6}$$

С его помощью можно вычислить поверхностную плотность η_P связанных зарядов на границе раздела (рис. 26.1):

$$\eta_{\mathbf{P}}=-(\mathbf{n}[\mathbf{P}])=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{n}[\mathbf{E}])=\frac{e\cos^3\vartheta}{2\pi a^2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}. \tag{26.7}$$

Подсчитаем силу взаимодействия внесенного заряда e с этими связанными зарядами. Энергия взаимодействия равна

$$W'_e=\frac{1}{2}e\varphi'_2=\frac{ee'}{4a\varepsilon_2}=\frac{e^2}{4a\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \tag{26.8}$$

откуда находим силу взаимодействия («силу изображения»):

$$F_a=-\frac{\partial W'_e}{\partial a}=\frac{e^2}{4a^2\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}. \tag{26.9}$$

Метод инверсии основан на применении теоремы Кельвина (см. задачу **16.4**). Суть его состоит в следующем. Допустим, что мы знаем решение уравнения Пуассона $\Delta\varphi=-4\pi\rho$ в некоторой области V. Совершим теперь преобразование инверсии радиуса a с центром в некоторой точке $\mathbf{r}_0$:

$$\varphi'(\mathbf{r})=a\varphi(\mathbf{r}')/R, \quad \mathbf{r}'\equiv a^2\mathbf{R}/R^2, \tag{26.10}$$

где $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$. При этом преобразовании область V перейдет в некоторую другую область V', а уравнение Пуассона, согласно теореме Кельвина, примет вид

$$\Delta\varphi'=(a/R)^5\Delta'\varphi(\mathbf{r}')=-4\pi(a/R)^5\rho(\mathbf{r}'), \tag{26.11}$$

что эквивалентно введению в области V' нового распределения зарядов с плотностью

$$\rho'(\mathbf{r})=(a/R)^5\rho(\mathbf{r}'). \tag{26.12}$$

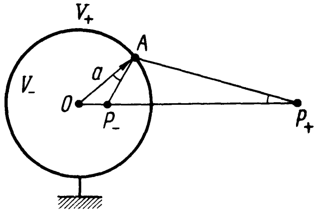

Рис. 26.2

Таким образом, преобразование инверсии связывает между собой решения двух разных задач электростатики.

Используем метод инверсии для решения следующей задачи. Пусть имеется заземленная проводящая сфера радиуса a и вне ее задано некоторое распределение зарядов $\rho_+(\mathbf{r})$. Введем обозначения $V_\pm$ для областей пространства вне и внутри сферы (рис. 26.2). Согласно (17.6), будем искать решение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_+ \tag{26.13}$$

в области V_+, удовлетворяющее граничному условию $\varphi=0$ на поверхности сферы, в виде

$$\varphi = \int\limits_{V_+} \frac{\rho_+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}V' + \varphi_0, \tag{26.14}$$

где φ_0 — некоторое решение уравнения Лапласа.

Для нахождения φ_0 поместим в области V_- инвертированные заряды, плотность которых, согласно (26.12), равна

$$\rho_-(\mathbf{r}) = -(a/r)^5 \rho_+(a^2\mathbf{r}/r^2), \tag{26.15}$$

и рассмотрим создаваемый ими потенциал

$$\varphi_0 = \int\limits_{V_-} \frac{\rho_-(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}V'. \tag{26.16}$$

Чтобы убедиться в выполнении граничного условия, вычислим потенциал φ_0 на поверхности сферы в некоторой точке A (рис. 26.2). Для удобства введем обозначения ($OP_\pm = r_\pm$, $AP_\pm = R_\pm$) и воспользуемся тем, что условие инверсии $r_+ r_- = a^2$ эквивалентно подобию $\triangle OAP_-$ и $\triangle OAP_+$, из которого следует, что

$$r_+/a = a/r_- = R_+/R_- = \text{const}. \tag{26.17}$$

Этот факт не удивителен и является выражением известного свойства окружности быть геометрическим местом точек, для которых отношение расстояний до двух заданных точек постоянно (*окружность Аполлония*). Используя (26.17), а также закон преобразования при инверсии элемента объема

$$\mathrm{d}V_+ = r_+^2\,\mathrm{d}r_+\,\mathrm{d}\Omega = (a/r_-)^6\,\mathrm{d}V_-,$$

для точек на поверхности сферы имеем

$$\int_{V_-}\frac{\rho_-(P'_-)}{R_-}\mathrm{d}V' = -\int_{V_+}\frac{\rho_+(P'_+)r'_-}{aR_-}\mathrm{d}V' = -\int_{V_+}\frac{\rho_+(P'_+)}{R_+}\mathrm{d}V',$$

что эквивалентно выполнению граничного условия $\varphi=0$. Таким образом, решение задачи имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{V_+}\frac{\rho_+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V' - \int_{V_-}\left(\frac{a}{r'}\right)^5\rho_+\left[\left(\frac{a}{r'}\right)^2\mathbf{r}'\right]\frac{\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (26.18)$$

Задача 26.1. *На расстоянии l от проводящей плоскости параллельно ей помещен бесконечный проводящий цилиндр радиуса a с зарядом $\varkappa$ на 1 см длины. Считая окружающую среду однородным диэлектриком с проницаемостью ε, найти в ней потенциал φ и силу притяжения F цилиндра к плоскости.*

§ 27. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Так как в проводниках объемная плотность электрического заряда равна нулю, то в электростатическом поле на них действует только поверхностная сила с некоторой поверхностной плотностью $\mathbf{t}$. Очевидно, что сила, действующая на элемент поверхности $\mathrm{d}S$, может быть представлена в виде

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{t}\,dS = \eta\mathbf{E}'\mathrm{d}S, \qquad (27.1)$$

где $\mathbf{E}'$ — напряженность *действующего поля*, равная напряженности $\mathbf{E}$ полного поля за вычетом вклада элемента $\mathrm{d}S$. Таким же методом, как в задаче **3.4**, можно показать, что $\mathbf{E}'=\mathbf{E}/2$, и поэтому

$$\mathbf{t} = \eta\mathbf{E}/2. \qquad (27.2)$$

В то же время [см. (22.6) и (22.8)]

$$\eta = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{nD}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{n}E. \qquad (27.3)$$

Все это позволяет представить поверхностную плотность сил, действующих на проводник, в виде

$$\mathbf{t} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE})\mathbf{n} \equiv w_e\mathbf{n}. \qquad (27.4)$$

Таким образом, проводники в электростатическом поле испытывают растяжение, очевидной причиной которого является расталкивание поверхностных зарядов. Интересно, что численно это растяжение совпадает с плотностью электростатической энергии w_e.