$$\int\limits_{V_-} \frac{\rho_-(P'_-)}{R_-} \mathrm{d}V' = -\int\limits_{V_+} \frac{\rho_+(P'_+)\,r'_-}{aR_-} \mathrm{d}V' = -\int\limits_{V_+} \frac{\rho_+(P'_+)}{R_+} \mathrm{d}V',$$

что эквивалентно выполнению граничного условия $\varphi = 0$. Таким образом, решение задачи имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int\limits_{V_+} \frac{\rho_+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}V' - \int\limits_{V_-} \left(\frac{a}{r'}\right)^5 \rho_+\left[\left(\frac{a}{r'}\right)^2 \mathbf{r}'\right] \frac{\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{26.18}$$

Задача 26.1. *На расстоянии l от проводящей плоскости параллельно ей помещен бесконечный проводящий цилиндр радиуса a с зарядом $\varkappa$ на 1 см длины. Считая окружающую среду однородным диэлектриком с проницаемостью ε, найти в ней потенциал φ и силу притяжения F цилиндра к плоскости.*

§ 27. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Так как в проводниках объемная плотность электрического заряда равна нулю, то в электростатическом поле на них действует только поверхностная сила с некоторой поверхностной плотностью $\mathbf{t}$. Очевидно, что сила, действующая на элемент поверхности $\mathrm{d}S$, может быть представлена в виде

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{t}\,dS = \eta\mathbf{E}'\mathrm{d}S, \tag{27.1}$$

где $\mathbf{E}'$ — напряженность *действующего поля*, равная напряженности $\mathbf{E}$ полного поля за вычетом вклада элемента $\mathrm{d}S$. Таким же методом, как в задаче **3.4**, можно показать, что $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/2$, и поэтому

$$\mathbf{t} = \eta\mathbf{E}/2. \tag{27.2}$$

В то же время [см. (22.6) и (22.8)]

$$\eta = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{nD}), \quad \mathbf{E} = \mathbf{n}E. \tag{27.3}$$

Все это позволяет представить поверхностную плотность сил, действующих на проводник, в виде

$$\mathbf{t} = \frac{1}{8\pi}(\mathbf{DE})\,\mathbf{n} \equiv w_e\mathbf{n}. \tag{27.4}$$

Таким образом, проводники в электростатическом поле испытывают растяжение, очевидной причиной которого является расталкивание поверхностных зарядов. Интересно, что численно это растяжение совпадает с плотностью электростатической энергии w_e.

Перейдем теперь к вычислению сил, действующих в электростатическом поле на диэлектрическую среду. Для этого воспользуемся выведенным ранее соотношением (23.13), согласно которому изменение энергии системы при малом изменении диэлектрической проницаемости среды равно

$$\delta W_e = -\frac{1}{8\pi}\int E^2 \delta\varepsilon \, dV. \tag{27.5}$$

В общем случае диэлектрическая проницаемость ε является сложной функцией плотности вещества $\tau(\mathbf{r})$, температуры T, напряжений в среде и многих других параметров. Для простоты предположим, что ε зависит лишь от плотности вещества и явно от точки $\mathbf{r}$, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, \tau)$. В таком случае для вычисления сил, действующих на диэлектрик, можно воспользоваться принципом возможных перемещений и рассмотреть бесконечно малое смещение диэлектрика на вектор $\delta\mathbf{a}(\mathbf{r})$ в некоторой малой области V. Тогда

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon &= \varepsilon\left[\mathbf{r}-\delta\mathbf{a}, \tau'(\mathbf{r})\right] - \varepsilon\left[\mathbf{r}, \tau(\mathbf{r})\right] \equiv \\ &\equiv \varepsilon\left[\mathbf{r}-\delta\mathbf{a}, \tau(\mathbf{r}-\delta\mathbf{a}) + \delta\tau\right] - \varepsilon\left[\mathbf{r}, \tau(\mathbf{r})\right] \approx \\ &\approx -(\delta\mathbf{a}\nabla\varepsilon) + \delta\tau(\partial\varepsilon/\partial\tau),\end{aligned} \tag{27.6}$$

где $\delta\tau = \tau'(\mathbf{r}) - \tau(\mathbf{r}-\delta\mathbf{a}) \approx \tau'(\mathbf{r}+\delta\mathbf{a}) - \tau(\mathbf{r})$.

Воспользуемся законом сохранения массы вещества при деформации $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{a}$, согласно которому

$$\delta(\tau dV) = \tau'(\mathbf{r}')\, dV' - \tau(\mathbf{r})\, dV = 0. \tag{27.7}$$

Преобразуем элемент объема dV' к старым переменным, введя якобиан преобразования $\mathcal{I}$, т. е. полагая $dV' = \mathcal{I}\, dV$, где

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \det \| \partial_i (x^k + \delta a^k) \| = \det \| \delta_i^k + \partial_i(\delta a^k) \| \approx \\ &\approx \prod_{i=1}^{3} \left[1 + \partial_i(\delta a^i)\right] \approx 1 + \operatorname{div}\delta\mathbf{a}.\end{aligned} \tag{27.8}$$

Подставляя (27.8) в (27.7), получаем

$$\delta\tau = -\tau \operatorname{div}\delta\mathbf{a}. \tag{27.9}$$

Таким образом, из (27.6) находим

$$\delta\varepsilon = -(\delta\mathbf{a}\,\nabla\varepsilon) - \tau(\partial\varepsilon/\partial\tau)\operatorname{div}\delta\mathbf{a}. \tag{27.10}$$

Подставляя (27.10) в (27.5), находим изменение энергии

$$\delta W_e = \frac{1}{8\pi}\int_V E^2\left[(\delta\mathbf{a}\nabla\varepsilon) + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\operatorname{div}\delta\mathbf{a}\right] dV. \tag{27.11}$$

С другой стороны, (27.11) должно быть пропорционально, согласно принципу возможных перемещений, элементарной работе внешних сил. Вводя плотность сил $\mathbf{f}_e^{\text{связ}}$, действующих на диэлектрик, имеем

$$\delta W_e = -\int\limits_V (\mathbf{f}_e^{\text{связ}} \delta \mathbf{a}) \, \mathrm{d}V. \tag{27.12}$$

Для того чтобы привести δW_e к виду (27.12), выполним во втором слагаемом (27.11) интегрирование по частям. Возникающий при этом поверхностный интеграл обращается в нуль, поскольку вне области V, по условию, $\delta \mathbf{a} = 0$. Таким образом,

$$\delta W_e = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \left[E^2 (\delta \mathbf{a} \nabla \varepsilon) - \delta \mathbf{a} \cdot \nabla \left(\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2 \right) \right] \mathrm{d}V. \tag{27.13}$$

Сравнивая (27.13) и (27.12), находим выражение для плотности сил, действующих на диэлектрик в электростатическом поле:

$$\mathbf{f}_e^{\text{связ}} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \nabla \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \nabla \left(\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2 \right). \tag{27.14}$$

Задача 27.1. *Показать, что при электризации тел трением или при их близком контакте положительно заряжается вещество с большей диэлектрической проницаемостью (закон Кёна).*

Для разреженных диэлектриков выражение для плотности силы (27.14) упрощается. В этом случае ε можно считать линейной функцией τ, положив $\varepsilon \approx 1 + c\tau$ [см. (58.25)]. В этом приближении $\tau(\partial \varepsilon / \partial \tau) \approx \varepsilon - 1$ и (27.14) принимает вид

$$\mathbf{f}_e^{\text{связ}} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2. \tag{27.15}$$

Формулу (27.15) можно получить и в микроскопической теории. В самом деле, как следует из решения задачи **23.4**, на диполь $\mathbf{p}$ в электростатическом поле $\mathbf{E}$ действует сила

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{p}\mathbf{E}) = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}. \tag{27.16}$$

Суммируя (27.16) по всем диполям $\mathbf{p}_i$ из физического бесконечно малого объема ΔV и считая напряженность $\mathbf{E}_i$ действующего поля совпадающей с напряженностью $\mathbf{E}$ среднего поля в среде, что справедливо для разреженных диэлектриков с $\varepsilon - 1 \ll 1$, находим

$$\mathbf{f}_e^{\text{связ}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} \mathbf{F}_i = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{p}_i \nabla) \mathbf{E}_i \approx$$

$$\approx \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\mathbf{p}_i \nabla) \mathbf{E} \equiv (\mathbf{P} \nabla) \mathbf{E}. \tag{27.17}$$

Нетрудно видеть, что (27.17) сводится к (27.15), если учесть, что $4\pi\mathbf{P}=(\varepsilon-1)\mathbf{E}$, и использовать тождество (2П.4д), согласно которому

$$(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}=\nabla E^2/2-[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]=\nabla E^2/2, \tag{27.18}$$

поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$.

Если в диэлектрике имеются свободные заряды, распределенные с плотностью ρ, то плотность сил, действующих на среду в электростатическом поле, равна

$$\mathbf{f}_e=\rho\mathbf{E}-\frac{1}{8\pi}E^2\nabla\varepsilon+\frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \tag{27.19}$$

Иногда бывает удобно, поступая так же, как при решении задачи **13.1**, представить (27.19) в виде

$$\mathbf{f}_e=\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}_{(e)}, \tag{27.20}$$

где $\hat{\mathrm{T}}_{(e)}$ — тензор электрических натяжений, имеющий компоненты

$$T^{ik}_{(e)}=\frac{\varepsilon}{4\pi}E^iE^k-\frac{1}{8\pi}E^2\left(\varepsilon-\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\delta^{ik}. \tag{27.21}$$

Согласно (27.20), полная сила, действующая на диэлектрик в некоторой области V, равна

$$\mathbf{F}_e=\int\limits_V\mathbf{f}_e\,\mathrm{d}V=\int\limits_V\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}_{(e)}\,\mathrm{d}V. \tag{27.22}$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского в форме (2П.6), сведем объемный интеграл в (27.22) к интегралу по поверхности S, окружающей объем V:

$$\mathbf{F}_e=\oint\limits_S(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathrm{T}}_{(e)})\,\mathrm{d}S=\oint\limits_S\left[\frac{\varepsilon}{4\pi}(\mathbf{nE})\mathbf{E}-\frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon-\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\mathbf{n}\right]\mathrm{d}S. \tag{27.23}$$

§ 28. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТОКОВ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Перейдем к рассмотрению магнитостатических задач. В этом случае исходными уравнениями являются

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M}\ \text{(в простейшем случае } \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}).$$

С их помощью можно определить индукцию **B** магнитного поля, возникающего в магнетиках при наличии:

1) токов с заданной плотностью $\mathbf{j}$;

2) постоянных магнитов;