Нетрудно видеть, что (27.17) сводится к (27.15), если учесть, что $4\pi\mathbf{P}=(\varepsilon-1)\mathbf{E}$, и использовать тождество (2П.4д), согласно которому

$$(\mathbf{E}\nabla)\mathbf{E}=\nabla E^2/2-[\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}]=\nabla E^2/2, \qquad (27.18)$$

поскольку $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$.

Если в диэлектрике имеются свободные заряды, распределенные с плотностью ρ, то плотность сил, действующих на среду в электростатическом поле, равна

$$\mathbf{f}_e=\rho\mathbf{E}-\frac{1}{8\pi}E^2\nabla\varepsilon+\frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \qquad (27.19)$$

Иногда бывает удобно, поступая так же, как при решении задачи **13.1**, представить (27.19) в виде

$$\mathbf{f}_e=\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}_{(e)}, \qquad (27.20)$$

где $\hat{\mathrm{T}}_{(e)}$ — тензор электрических натяжений, имеющий компоненты

$$T^{ik}_{(e)}=\frac{\varepsilon}{4\pi}E^iE^k-\frac{1}{8\pi}E^2\left(\varepsilon-\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\delta^{ik}. \qquad (27.21)$$

Согласно (27.20), полная сила, действующая на диэлектрик в некоторой области V, равна

$$\mathbf{F}_e=\int_V\mathbf{f}_e\,\mathrm{d}V=\int_V\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}_{(e)}\,\mathrm{d}V. \qquad (27.22)$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского в форме (2П.6), сведем объемный интеграл в (27.22) к интегралу по поверхности S, окружающей объем V:

$$\mathbf{F}_e=\oint_S(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathrm{T}}_{(e)})\,\mathrm{d}S=\oint_S\left[\frac{\varepsilon}{4\pi}(\mathbf{nE})\mathbf{E}-\frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon-\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\mathbf{n}\right]\mathrm{d}S. \qquad (27.23)$$

§ 28. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, СОЗДАВАЕМОЕ ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТОКОВ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Перейдем к рассмотрению магнитостатических задач. В этом случае исходными уравнениями являются

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}+4\pi\mathbf{M} \text{ (в простейшем случае } \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}).$$

С их помощью можно определить индукцию **B** магнитного поля, возникающего в магнетиках при наличии:

1) токов с заданной плотностью **j**;
2) постоянных магнитов;

3) внешнего магнитного поля с напряженностью $\mathbf{H}_0$;

4) сверхпроводников (с заданными полными токами).

Найдем сначала индукцию магнитного поля, создаваемого заданными токами в вакууме*, т. е. решим систему уравнений:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=4\pi\mathbf{j}/c, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{28.1}$$

Плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, согласно первому уравнению (28.1), подчиняется стационарному закону сохранения:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0. \tag{28.2}$$

Чтобы удовлетворить второму из уравнений (28.1), воспользуемся тождеством $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}=0$ и положим

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{28.3}$$

введя *векторный потенциал* $\mathbf{A}$.

Подставляя (28.3) в первое из уравнений (28.1), имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=4\pi\mathbf{j}/c, \tag{28.4}$$

или с учетом соотношения (2П.13)

$$\Delta\mathbf{A}-\nabla\operatorname{div}\mathbf{A}=-4\pi\mathbf{j}/c. \tag{28.5}$$

Заметим, что из уравнения (28.3) при заданной индукции $\mathbf{B}$ магнитного поля вектор-потенциал $\mathbf{A}$ определяется неоднозначно. В самом деле, согласно тождеству $\operatorname{rot}\nabla\psi=0$, вместо $\mathbf{A}$ всегда можно взять другой вектор $\mathbf{A}'$, отличающийся на градиент произвольного скаляра ψ**:

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\psi. \tag{28.6}$$

Но последний всегда можно выбрать так, чтобы $\operatorname{div}\mathbf{A}'=0$. Для этого достаточно подчинить ψ уравнению

$$\Delta\psi=-\operatorname{div}\mathbf{A}.$$

Таким образом, всегда можно положить $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ и находить вектор-потенциал $\mathbf{A}$ как решение системы уравнений:

$$\Delta\mathbf{A}=-4\pi\mathbf{j}/c, \quad \operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{28.7}$$

Замечая, что в декартовых координатах любая из компонент вектора $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению типа Пуассона, можно по аналогии с (17.4) записать решение уравнений (28.7) для всего пространства в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}\,\mathrm{d}V', \tag{28.8}$$

---

* Случай однородного магнетика получается умножением $\mathbf{j}$ на μ.

** Преобразование (28.6) называется *градиентным* или *калибровочным преобразованием* вектора-потенциала $\mathbf{A}$.

где $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. При этом нетрудно убедиться, что (28.8) удовлетворяет условию $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$. В самом деле, переходя в (28.8) к новой переменной интегрирования $\mathbf{R}$, имеем

$$c\operatorname{div}\mathbf{A}=\operatorname{div}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{R})}{R}\mathrm{d}V_R=\int\frac{\operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}-\mathbf{R})}{R}\mathrm{d}V_R,$$

что действительно обращается в нуль [см. (28.2)].

Отметим, что к решению (28.8) можно добавить вектор $\mathbf{A}_0$, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\mathbf{A}_0=0$ и условию $\operatorname{div}\mathbf{A}_0=0$. Однако если система токов ограничена и физически приемлемыми считаются только решения, исчезающие на бесконечности, то ясно, что $\mathbf{A}_0\equiv 0$. Это следует из того, что $\mathbf{A}_0$ является векторной гармонической функцией и по принципу максимума может удовлетворять граничному условию $\lim\limits_{r\to\infty}\mathbf{A}_0=0$ только при $\mathbf{A}_0\equiv 0$.

Применяя к (28.8) операцию ротора, находим индукцию магнитного поля:

$$\mathbf{B}=\frac{1}{c}\int\operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}\right)\mathrm{d}V'=\frac{1}{c}\int\left[\nabla\frac{1}{R}\mathbf{j}'\right]\mathrm{d}V',$$

откуда следует закон Био — Савара — Лапласа:

$$\mathbf{B}=\frac{1}{c}\int\frac{[\mathbf{j}'\mathbf{R}]}{R^3}\mathrm{d}V'. \tag{28.9}$$

В итоге доказана эквивалентность (28.1) и (28.9). Для однородного магнетика в (28.9) вместо $\mathbf{B}$ нужно подставить $\mathbf{H}$.

Задача 28.1. *Найти вектор-потенциал* $\mathbf{A}$ *и индукцию* $\mathbf{B}$ *магнитного поля, создаваемого:* а) *прямым током* I; б) *бесконечной прямой катушкой с током силой* I, *имеющей* n *витков на* 1 см *и радиус* a.

Перейдем теперь к задаче о нахождении индукции $\mathbf{B}$ в неоднородном магнетике, характеризующемся магнитной проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$. В этом случае необходимо использовать уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{28.10}$$

подставляя в которое (28.3) находим

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{28.11}$$

Допустим, что требуется найти индукцию $\mathbf{B}$ в некоторой области V, ограниченной замкнутой поверхностью S. При этом можно выделить три типа граничных задач:

1) на поверхности S задан вектор $[\mathbf{nA}]$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S;

2) на поверхности S задан вектор $[\mathbf{nH}]$;

3) на части поверхности S задан вектор $[\mathbf{nA}]$, а на другой ее части — вектор $[\mathbf{nH}]$.

Покажем, что во всех этих задачах магнитное поле определяется однозначно, а векторный потенциал — с точностью до градиентного преобразования.

Предположив противное, примем, что существует два разных решения $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Тогда их разность $\mathbf{u} \equiv \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$, согласно (28.11) и (2П.4а), будет удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{u}}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{u}\right] = \frac{1}{\mu}(\operatorname{rot}\mathbf{u})^2. \tag{28.12}$$

Интегрируя (28.12) по области V и применяя теорему Гаусса — Остроградского, находим

$$\int_V \frac{1}{\mu}(\operatorname{rot}\mathbf{u})^2\,\mathrm{d}V = \oint_S \frac{1}{\mu}([\mathbf{nu}]\operatorname{rot}\mathbf{u})\,\mathrm{d}S. \tag{28.13}$$

Очевидно, что поверхностный интеграл в (28.13) исчезает с учетом наложенных граничных условий, так как во всех случаях либо $[\mathbf{nu}]$, либо $[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{u}]$ обращаются в нуль на поверхности S. Но тогда из (28.13) вытекает, что $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$. Это и доказывает теорему единственности.

Наконец, остановимся на граничных условиях (12.3) и (12.6), которые должны накладываться в тех случаях, когда магнитная проницаемость испытывает разрыв на некоторой поверхности S' внутри области V. Прежде всего необходимо наложить условие непрерывности касательной составляющей вектора-потенциала $\mathbf{A}$ на поверхности S':

$$[\![\mathbf{nA}]\!] = 0. \tag{28.14}$$

Это делается для того, чтобы индукция $\mathbf{B}$ была конечной. В самом деле, если принять, что $\mathbf{A}$ может иметь скачок $[\mathbf{A}]$ на S', то, согласно (21.3), индукция на S' имеет сингулярную часть

$$\mathbf{B}^{\text{синг}} = [\nabla f\,[\mathbf{A}]]\,\delta[f(\mathbf{r})],$$

где $f(\mathbf{r}) = 0$ — уравнение поверхности S'. Таким образом, индукция $\mathbf{B}$ принимает бесконечные значения в точках поверхности S', что физически недопустимо. Если же выполнено условие (28.14), то $\mathbf{B}^{\text{синг}} = 0$, так как $\mathbf{n} = \nabla f/f$.

Задача 28.2. *Показать, что граничное условие* $(\mathbf{n}\,[\mathbf{B}]) = 0$ *является следствием* (28.14).

Таким образом, с учетом (12.6) на границе раздела двух магнетиков должны выполняться следующие условия:

$$[\mathbf{n}\,[\mathbf{A}]] = 0, \quad \left[\mathbf{n}\left[\!\!\left[\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right]\!\!\right]\right] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i}, \tag{28.15}$$

где $\mathbf{i}$ — плотность поверхностных токов проводимости на границе раздела.