§ 29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ОГРАНИЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ТОКОВ (МАГНИТНОЕ МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ)

Предположим, что токи с плотностью $\mathbf{j}$ сосредоточены в некоторой области пространства V, которую можно заключить в сферу конечного радиуса a. Подставив в общее выражение для вектора-потенциала

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V' \qquad (29.1)$$

разложение (19.4), найдем для $r>a>r'$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{cl!}\int\limits_V \mathbf{j}'(\mathbf{r}'\nabla)^l\frac{1}{r}\mathrm{d}V'=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\mathcal{M}^{i_1\dots i_l}\partial_{i_1}\dots\partial_{i_l}\frac{1}{r}, \qquad (29.2)$$

где введен тензор 2^l-польного магнитного момента

$$\mathcal{M}^{i_1\dots i_l}\equiv\frac{1}{c}\int\limits_V x'^{i_1}\dots x'^{i_l}\mathbf{j}'\mathrm{d}V', \qquad (29.3)$$

каждая компонента которого является вектором.

Вычислим низшие мультипольные моменты $\mathcal{M}_{(0)}$ и $\mathcal{M}_{(1)}$ [которыми на основании оценки типа (19.18) можно ограничиться при определении $\mathbf{A}$, если $r\gg a$]. Для этого удобно воспользоваться соотношением (28.2) и условием ограниченности системы токов, согласно которому $\mathbf{j}=0$ при $r>a$. Умножим (28.2) на произвольную функцию $f(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по области V, применив теорему Гаусса — Остроградского:

$$\int\limits_V f(\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{j}\,\mathrm{d}V=-\int\limits_V(\mathbf{j}\nabla)f\,\mathrm{d}V+\oint\limits_{S\to\infty}f(\mathbf{r})(\mathbf{nj})\,\mathrm{d}S=0. \qquad (29.4)$$

Но поверхностный интеграл в (29.4) исчезает, так как $\mathbf{j}=0$ при $r>a$. В результате получается тождество

$$\int\limits_V(\mathbf{j}\nabla)f(\mathbf{r})\mathrm{d}V=0. \qquad (29.5)$$

Подставляя $f(\mathbf{r})=x^i$ в (29.5), находим

$$\int\limits_V(\mathbf{j}\nabla)x^i\mathrm{d}V=\int\limits_V j^i\mathrm{d}V=0.$$

Иначе говоря,

$$\mathcal{M}_{(0)}=\int\limits_V\mathbf{j}\,\mathrm{d}V=0. \qquad (29.6)$$

Выбирая в (29.5) $f(\mathbf{r})=\mathbf{r}x^k$, имеем

$$\int\limits_V (\mathbf{j}\nabla)\mathbf{r}x^k \mathrm{d}V=\int\limits_V (\mathbf{j}x^k+\mathbf{r}j^k)\mathrm{d}V=0. \qquad (29.7)$$

С помощью (29.7) первый член мультипольного разложения (29.2) преобразуется к виду

$$\mathbf{A}_1=-\frac{1}{c}\int\limits_V \mathbf{j}'(\mathbf{r}'\nabla)\frac{1}{r}\mathrm{d}V'=\frac{1}{c}\int\limits_V \mathbf{r}'(\mathbf{j}\nabla)\frac{1}{r}\mathrm{d}V'=$$

$$=\frac{1}{2c}\int\limits_V [-\mathbf{j}'(\mathbf{r}'\nabla)+\mathbf{r}'(\mathbf{j}'\nabla)]\frac{1}{r}\mathrm{d}V'=-\frac{1}{2c}\int\limits_V [[\mathbf{r}'\mathbf{j}']\nabla]\frac{1}{r}\mathrm{d}V',$$

или, если ввести магнитный момент системы токов

$$\mathbf{m}\equiv\frac{1}{2c}\int\limits_V [\mathbf{rj}]\,\mathrm{d}V, \qquad (29.8)$$

— к виду

$$\mathbf{A}_1=[\mathbf{mr}]/r^3. \qquad (29.9)$$

Используя тождество (справедливое при $r>0$)

$$\mathrm{rot}\frac{[\mathbf{mr}]}{r^3}=-\nabla\frac{(\mathbf{mr})}{r^3}, \qquad (29.10)$$

доказанное при решении задачи **1.5**, индукцию, соответствующую векторному потенциалу (29.9), можно записать по аналогии с электростатикой:

$$\mathbf{B}_1=-\nabla\frac{(\mathbf{mr})}{r^3}\equiv-\nabla\psi_1, \qquad (29.11)$$

т. е. введя *магнитный скалярный потенциал* ψ_1, отвечающий магнитному диполю с моментом $\mathbf{m}$:

$$\psi_1=(\mathbf{mr})/r^3. \qquad (29.12)$$

Нетрудно видеть, что, повторяя процедуру построения электрических мультиполей и взяв за исходное векторный потенциал (29.9) магнитного диполя, можно прийти к магнитостатическому аналогу формулы (19.9):

$$\mathbf{A}_l=(-1)^{l-1}\left[\prod_{i=1}^{l-1}(\mathbf{a}_i\nabla)\right]\frac{[\mathbf{mr}]}{r^3}. \qquad (29.13)$$

В качестве конкретного случая системы оганиченных токов рассмотрим замкнутый линейный ток силой I, текущий по некоторому контуру C. Так как для линейного тока $\mathbf{j}\mathrm{d}V=I\mathrm{d}\mathbf{l}$

и сила тока I постоянна в любом сечении контура C в соответствии с (28.2), то формула (29.1) в этом случае примет вид

$$\mathbf{A}=\frac{I}{c}\oint\limits_{C}\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}'}{R}. \tag{29.14}$$

Применяя теорему Стокса (2П.8а), приводим (29.14) к интегралу по правоориентированной поверхности S, натянутой на контур C:

$$\mathbf{A}=\frac{I}{c}\int\limits_{S}[\mathbf{n}'\nabla']\frac{1}{R}\mathrm{d}S'=\frac{I}{c}\int\limits_{S}\frac{[\mathbf{n}'\mathbf{R}]}{R^3}\mathrm{d}S'. \tag{29.15}$$

Очевидно, что (29.15) можно представить как вектор-потенциал двойного магнитного слоя (*магнитного листка*):

$$\mathbf{A}=\int\limits_{S}\frac{[\mathrm{d}\mathbf{m}'\mathbf{R}]}{R^3}, \tag{29.16}$$

где элементарный магнитный момент равен

$$\mathrm{d}\mathbf{m}'=I\mathbf{n}'\mathrm{d}S'/c, \tag{29.17}$$

что соответствует мощности двойного магнитного слоя $\tau_{\mathrm{m}}=I/c$.

Нетрудно видеть, что если ввести скалярный магнитный потенциал ψ, отвечающий (29.15), то он будет иметь такой же вид, как и для двойного электрического слоя:

$$\psi=\int\limits_{S}\frac{(\mathrm{d}\mathbf{m}'\mathbf{R})}{R^3}=\frac{I}{c}\Omega, \tag{29.18}$$

где Ω — телесный угол, под которым виден контур C из точки наблюдения (см. задачу **1.5**). Очевидно, что потенциал ψ не является однозначной функцией точки — при обходе вокруг контура с током он испытывает приращение

$$[\psi]=4\pi\tau_{\mathrm{m}}=4\pi I/c. \tag{29.19}$$

Но если в случае двойного электрического слоя скачок потенциала на его поверхности обусловлен тем, что внутри бесконечно тонкого двойного слоя напряженность электрического поля оказывается бесконечно большой [см. (20.6)], то отмеченная неоднозначность магнитного скалярного потенциала обусловлена двусвязностью области определения функции ψ (все пространство, за исключением контура с током). Эту область можно сделать односвязной, проведя разрез по некоторой поверхности S, натянутой на контур, и считая, что на ней потенциал ψ испытывает скачок (29.19). Но так как поверхность S можно произвольно сместить так, чтобы точка наблюдения не попала на нее, то всегда оказывается справедливым преобразование (29.15) и представление скалярного магнитного потенциала в виде (29.18).

Таким образом, мы пришли к выводу, что *магнитное поле замкнутого линейного тока I тождественно полю магнитного листка мощностью $\tau_{\mathrm{m}}=I/c$, натянутого на контур тока* (*теорема эквивалентности Ампера*). В пользу этого утверждения говорит и результат задачи **8.1**, согласно которому магнитные моменты замкнутого линейного контура с током и магнитного листка оказываются одинаковыми и имеют вид

$$\mathbf{m}=\frac{I}{2c}\oint\limits_C[\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{l}]=\frac{I}{c}\int\limits_S\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{29.20}$$

Задача 29.1. *Показать, что если ограниченная система токов имеет магнитный квадрупольный момент $\mathscr{M}^{ik}=-(4/3)\mathrm{T}\delta^{ik}$, то*

$$\mathbf{T}=\frac{1}{10c}\int\limits_V[\mathbf{r}(\mathbf{rj})-2r^2\mathbf{j}]\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int\limits_V[\mathbf{rM}]\,\mathrm{d}V,$$

где $\mathbf{j}=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$. Вектор $\mathbf{T}$ называют тороидностью или анапольным моментом. Показать, что для тороидальной катушки с током I, имеющей N витков, тороидность равна $\mathbf{T}=\mathbf{e}_z VNI/(4\pi c)$, где V — объем катушки. Положив $\mathbf{M}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\tau}$, убедиться, что $\boldsymbol{\tau}$ — плотность тороидности.

Задача 29.2. *Найти индукцию магнитного поля линейного кругового тока. Результат выразить через полные эллиптические интегралы первого и второго рода:*

$$K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}};\quad E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}. \tag{29.21}$$

Найти асимптотическое выражение для поля вблизи контура с током и вдали от него.

§ 30. ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

В постоянном магните отсутствует ток проводимости, однако в каждой его точке существуют намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ и обусловленный ею ток намагничения с плотностью $\mathbf{j}_{\text{м}}=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}$. Поэтому вектор-потенциал, создаваемый этим током, может быть определен как

$$\mathbf{A}=\int\limits_V\frac{\mathrm{rot}'\mathbf{M}'}{R}\,\mathrm{d}V'. \tag{30.1}$$