

односвязной, проведя разрез по некоторой поверхности S , натянутой на контур, и считая, что на ней потенциал ψ испытывает скачок (29.19). Но так как поверхность S можно произвольно сместить так, чтобы точка наблюдения не попала на нее, то всегда оказывается справедливым преобразование (29.15) и представление скалярного магнитного потенциала в виде (29.18).

Таким образом, мы пришли к выводу, что магнитное поле замкнутого линейного тока I тождественно полю магнитного листка мощностью $\tau_m = I/c$, натянутого на контур тока (теорема эквивалентности Ампера). В пользу этого утверждения говорит и результат задачи 8.1, согласно которому магнитные моменты замкнутого линейного контура с током и магнитного листка оказываются одинаковыми и имеют вид

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2c} \oint_C [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = \frac{I}{c} \int_S \mathbf{n} dS. \quad (29.20)$$

Задача 29.1. Показать, что если ограниченная система токов имеет магнитный квадрупольный момент $\mathcal{M}^{ik} = -(4/3)\mathbf{T}\delta^{ik}$, то

$$\mathbf{T} = \frac{1}{10c} \int_V [\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{j}) - 2r^2\mathbf{j}] dV = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}\mathbf{M}] dV,$$

где $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Вектор \mathbf{T} называют тороидностью или анапольным моментом. Показать, что для тороидальной катушки с током I , имеющей N витков, тороидность равна $\mathbf{T} = \mathbf{e}_z VNI / (4\pi c)$, где V — объем катушки. Положив $\mathbf{M} = \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau}$, убедиться, что $\boldsymbol{\tau}$ — плотность тороидности.

Задача 29.2. Найти индукцию магнитного поля линейного кругового тока. Результат выразить через полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}; \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} d\beta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}. \quad (29.21)$$

Найти асимптотическое выражение для поля вблизи контура с током и вдали от него.

§ 30. ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ

В постоянном магните отсутствует ток проводимости, однако в каждой его точке существуют намагниченность $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ и обусловленный ею ток намагничения с плотностью $\mathbf{j}_m = c \operatorname{rot} \mathbf{M}$. Поэтому вектор-потенциал, создаваемый этим током, может быть определен как

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\operatorname{rot}' \mathbf{M}'}{R} dV'. \quad (30.1)$$

Однако использование этой формулы представляет значительные неудобства, вызванные необходимостью учета поверхностных токов намагничивания, возникающих на границах раздела двух магнетиков. В связи с этим (см. § 21) преобразуем формулу (30.1), воспользовавшись тождеством

$$\operatorname{rot}'\left(\frac{\mathbf{M}'}{R}\right) = \frac{1}{R}\operatorname{rot}'\mathbf{M}' - \frac{[\mathbf{M}'\mathbf{R}]}{R^3}. \quad (30.2)$$

С учетом соотношения (21.3) можно обосновать применимость в данном случае теоремы Остроградского (2П.5в), по которой

$$\int_V \operatorname{rot}'\left(\frac{\mathbf{M}'}{R}\right) dV' = \oint_S \frac{[\mathbf{n}'\mathbf{M}']}{R} dS' = 0, \quad (30.3)$$

поскольку вне магнетика $\mathbf{M} = 0$. Поэтому, интегрируя тождество (30.2) по объему магнетика V и используя (30.3), имеем

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{[\mathbf{M}'\mathbf{R}]}{R^3} dV', \quad (30.4)$$

что совпадает в соответствии с (29.9) с векторным потенциалом распределенного магнитного момента с плотностью \mathbf{M} .

Формулу (30.4) иногда записывают и в иной форме, полагая

$$\mathbf{A} = \int_V \left[\nabla \frac{1}{R} \mathbf{M}' \right] dV' \equiv \operatorname{rot} \mathbf{Z}, \quad (30.5)$$

где введен вспомогательный вектор

$$\mathbf{Z} = \int_V \frac{\mathbf{M}'}{R} dV', \quad (30.6)$$

называемый *магнитным вектором Герца*. Согласно (30.6), вектор \mathbf{Z} , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{Z} = -4\pi \mathbf{M}, \quad (30.7)$$

с учетом которого магнитная индукция может быть представлена в виде

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{Z} - \Delta \mathbf{Z} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M}. \quad (30.8)$$

Отсюда следует, что напряженность магнитного поля равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{Z}. \quad (30.9)$$

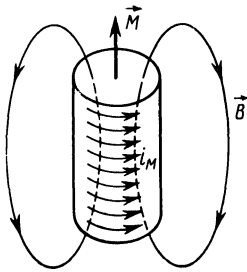


Рис. 30.1

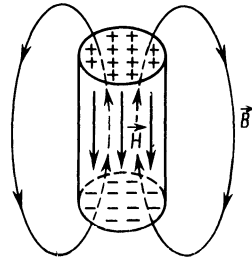


Рис. 30.2

С другой стороны, для того чтобы выполнялось уравнение $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, справедливое при отсутствии токов проводимости, можно ввести скалярный магнитный потенциал ψ , положив

$$\mathbf{H} = -\nabla\psi. \quad (30.10)$$

Сравнение (30.10) с (30.9) показывает, что

$$\psi = -\text{div } \mathbf{Z}, \quad (30.11)$$

т. е. знание магнитного вектора Герца \mathbf{Z} позволяет вычислить как векторный, так и скалярный потенциалы магнитного поля.

В качестве иллюстрации отмеченных выше особенностей поля постоянных магнитов рассмотрим конкретный случай цилиндрического магнита, однородно намагниченного вдоль оси. Так как намагниченность \mathbf{M} внутри магнита постоянна, а вне его исчезает, то ток намагничения с плотностью $\mathbf{j}_M = c \text{rot } \mathbf{M}$ течет только по поверхности. Плотность поверхностного тока намагничения находим так же, как в задаче 21.1, используя уравнение $\mathbf{j}_M = c \text{rot } \mathbf{M}$:

$$\mathbf{i}_M = c [\mathbf{n} [\mathbf{M}]]. \quad (30.12)$$

Таким образом, цилиндрический магнит эквивалентен соленоиду с током $i_M = cM$ на 1 см (рис. 30.1).

В то же время (см. § 29) поле линейных токов соленоида совпадает с потенциальным полем магнитных листков, если точка наблюдения не попадает на их поверхность. Следовательно, для расчета индукции \mathbf{B} вне магнита можно заменить его стопкой магнитных листков. Вследствие постоянства \mathbf{M} внутренние магнитные заряды компенсируют друг друга и вся стопка оказывается эквивалентной поверхностным магнитным зарядам, расположенным на торцах цилиндра (рис. 30.2). При этом плотность связанных магнитных зарядов может быть введена по аналогии с (7.1) и (21.14):

$$\rho_M = -\text{div } \mathbf{M} = \frac{1}{4\pi} \text{div } \mathbf{H}, \quad \eta_M = -(\mathbf{n} [\mathbf{M}]), \quad (30.13)$$

свободных же магнитных зарядов не существует, так как $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

На практике расчет поля постоянных магнитов представляет значительные трудности, поскольку зависимость $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ зачастую описывается сложной нелинейной функцией, значения которой к тому же определяются способом достижения заданного поля \mathbf{H} (*гистерезис*). Вот почему иногда бывает полезным *идеализированное приближение*, когда полагают

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}_0, \quad (30.14)$$

где $\mathbf{M}_0(\mathbf{r})$ — известная функция, задающая постоянную (остаточную) намагниченность образца. Очевидно, что вектор $(\mu - 1)\mathbf{H} \times (4\pi)^{-1}$ представляет собой индуцированную намагниченность. Если воспользоваться методом скалярного магнитного потенциала, положив $\mathbf{H} = -\nabla\psi$, то уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ дает

$$\operatorname{div}(\mu \nabla\psi) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}_0. \quad (30.15)$$

Таким образом, задача оказывается аналогичной соответствующей задаче электростатики. При этом граничные условия на поверхности раздела двух магнетиков имеют вид

$$[\psi] = 0, \quad (\mathbf{n} [\mu \nabla\psi]) = 4\pi(\mathbf{n} [\mathbf{M}_0]). \quad (30.16)$$

Задача 30.1. *Магнит представляет собой шар радиуса a с постоянной намагниченностью \mathbf{M}_0 и проницаемостью μ . Найти индукцию магнитного поля вне и внутри магнита.*

Задача 30.2. *Маленький магнитик с моментом \mathbf{m} находится на расстоянии a от стенки из мягкого железа ($\mu \gg 1$). Найти индукцию магнитного поля.*

Нетрудно видеть, что задачи на определение индукции магнитного поля в магнетиках при наличии однородного внешнего поля \mathbf{H}_0 аналогичны соответствующим задачам электростатики и их решение поэтому достигается заменой $\epsilon \rightarrow \mu$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ в известных решениях электростатических задач.

§ 31. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Поведение сверхпроводников в магнитном поле обладает некоторыми особенностями, изучению которых мы и посвятим данный параграф. Впервые сверхпроводимость была обнаружена *Г. Камерлинг-Оннесом* в 1911 г. при исследовании электрических свойств ртути в области низких температур. Оказалось, что при температуре $T_{\text{кр}} = 4,19$ К сопротивление ртути становится неощутимо малым, причем спад сопротивления очень резок (рис. 31.1). Впоследствии сверхпроводимость была обнаружена у многих металлов и сплавов (белое олово, цинк, алюминий и др.).

Для того чтобы проверить, действительно ли сопротивление сверхпроводников строго обращается в нуль при $T < T_{\text{кр}}$, английский физик *С. Коллинз* провел следующий опыт. При температуре, превышающей критическую ($T_1 > T_{\text{кр}}$), он помещал оловянное кольцо в магнитное поле и охлаждал его до некоторой