

На практике расчет поля постоянных магнитов представляет значительные трудности, поскольку зависимость $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ зачастую описывается сложной нелинейной функцией, значения которой к тому же определяются способом достижения заданного поля \mathbf{H} (*гистерезис*). Вот почему иногда бывает полезным *идеализированное приближение*, когда полагают

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}_0, \quad (30.14)$$

где $\mathbf{M}_0(\mathbf{r})$ — известная функция, задающая постоянную (остаточную) намагниченность образца. Очевидно, что вектор $(\mu - 1)\mathbf{H} \times (4\pi)^{-1}$ представляет собой индуцированную намагниченность. Если воспользоваться методом скалярного магнитного потенциала, положив $\mathbf{H} = -\nabla\psi$, то уравнение $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ дает

$$\operatorname{div}(\mu \nabla \psi) = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}_0. \quad (30.15)$$

Таким образом, задача оказывается аналогичной соответствующей задаче электростатики. При этом граничные условия на поверхности раздела двух магнетиков имеют вид

$$[\psi] = 0, \quad (\mathbf{n} [\mu \nabla \psi]) = 4\pi (\mathbf{n} [\mathbf{M}_0]). \quad (30.16)$$

Задача 30.1. *Магнит представляет собой шар радиуса a с постоянной намагниченностью \mathbf{M}_0 и проницаемостью μ . Найти индукцию магнитного поля вне и внутри магнита.*

Задача 30.2. *Маленький магнитик с моментом \mathbf{m} находится на расстоянии a от стенки из мягкого железа ($\mu \gg 1$). Найти индукцию магнитного поля.*

Нетрудно видеть, что задачи на определение индукции магнитного поля в магнетиках при наличии однородного внешнего поля \mathbf{H}_0 аналогичны соответствующим задачам электростатики и их решение поэтому достигается заменой $\epsilon \rightarrow \mu$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ в известных решениях электростатических задач.

§ 31. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Поведение сверхпроводников в магнитном поле обладает некоторыми особенностями, изучению которых мы и посвятим данный параграф. Впервые сверхпроводимость была обнаружена *Г. Камерлинг-Оннесом* в 1911 г. при исследовании электрических свойств ртути в области низких температур. Оказалось, что при температуре $T_{\text{кр}} = 4,19$ К сопротивление ртути становится неощутимо малым, причем спад сопротивления очень резок (рис. 31.1). Впоследствии сверхпроводимость была обнаружена у многих металлов и сплавов (белое олово, цинк, алюминий и др.).

Для того чтобы проверить, действительно ли сопротивление сверхпроводников строго обращается в нуль при $T < T_{\text{кр}}$, английский физик *С. Коллинз* провел следующий опыт. При температуре, превышающей критическую ($T_1 > T_{\text{кр}}$), он помещал оловянное кольцо в магнитное поле и охлаждал его до некоторой

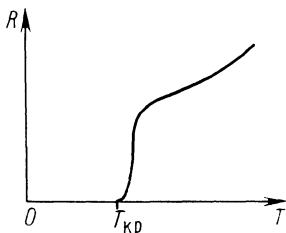


Рис. 31.1

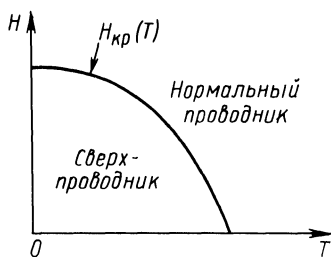


Рис. 31.2

температуры $T_2 < T_{кр}$, при которой олово становилось сверхпроводником. После этого магнитное поле выключалось и время от времени проводилось измерение наведенного в кольце тока. Это измерение осуществлялось косвенно: к кольцу подносилась небольшая обмотка, и по силе тока, наведенного в ней, можно было судить о силе тока в самом кольце. Никаких изменений силы тока в кольце не было обнаружено в течение 2,5 лет. Поэтому для оценки сопротивления кольца Коллинз взял за основу предел точности измерительной аппаратуры и нашел, что удельная проводимость сверхпроводящего кольца не меньше

$$\sigma \approx 3 \cdot 10^{22} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \approx 3 \cdot 10^{34} \text{ с}^{-1}, \quad (31.1)$$

т. е. примерно в 10^{16} раз выше, чем у меди. Таким образом, сопротивление сверхпроводников действительно обращается в нуль при температуре, меньшей критической*.

Вскоре выяснилось, что на критическую температуру $T_{кр}$, которая обычно меньше 20 К, сильно влияет внешнее магнитное поле**. Если для определенности брать образцы цилиндрической формы и помещать их в магнитное поле, параллельное оси, то при заданной температуре $T < T_{кр}$ и некотором поле $H_{кр}(T)$ сверхпроводимость пропадает. Для сверхпроводников зависимость $H_{кр}(T)$ аппроксимируется параболой (рис. 31.2):

$$H_{кр}(T) = H_{кр}(0) \left(1 - T^2/T_{кр}^2\right). \quad (31.2)$$

Таким образом, сверхпроводимость наблюдается только при температуре и напряженности внешнего магнитного поля, не превышающих некоторых критических значений. Обычно напряженность критического поля невелика и составляет сотни эрстед (за исключением некоторых сплавов — сверхпроводников второго

* Последующие измерения методом ядерного магнитного резонанса показали, что время затухания тока не меньше 10^5 лет.

** В 1987 г. с открытия швейцарских физиков К. Мюллера и Ж. Беднорца началось изучение высокотемпературной сверхпроводимости. Известны соединения с $T_{кр} > 100$ К.

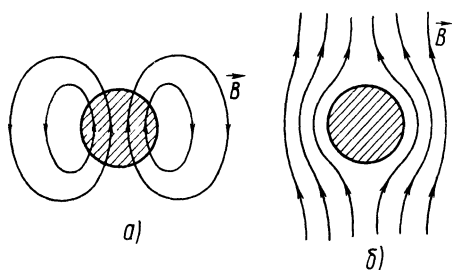


Рис. 31.3

ко в 1933 г. немецкие физики *В. Мейсснер* и *Р. Оксенфельд* открыли явление, которое опровергало эту гипотезу: ими было доказано, что *сверхпроводники являются идеальными диамагнетиками*. Это означает, что сверхпроводники полностью выталкивают из себя магнитное поле, т. е. внутри них всегда $\mathbf{B}=0$ (или формально $\mu=0$). В идеальный же проводник ($\sigma=\infty$) магнитное поле проникать может. Чтобы понять, в чем здесь дело, рассмотрим подробнее опыт Мейсснера—Оксенфельда. Они выбрали сферический образец из сверхпроводника и при $T > T_{\text{кр}}$ поместили его в магнитное поле. При этом поле полностью проникало в образец, поскольку он находился в нормальном (несверхпроводящем) состоянии и имел $\mu \approx 1$. Затем температура была понижена до критической, так что образец стал сверхпроводящим. Если бы это был идеальный проводник, то он сохранил бы захваченный магнитный поток, поскольку при $\sigma=\infty$ и конечной плотности тока \mathbf{j} было бы $\mathbf{E}=\mathbf{j}/\sigma=0$ и, по закону электромагнитной индукции Фарадея,

$$-\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E} = \oint_c (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = 0. \quad (31.3)$$

Поэтому при выключении внешнего магнитного поля наведенные в образце токи создали бы в точности такой же магнитный поток, как прежний (рис. 31.3, *a*). Однако измерения конфигурации линий индукции вблизи образца при включенном внешнем поле H_0 показали (рис. 31.3, *б*), что поле в образец не проникает. В то же время при выключенном внешнем поле никакого собственного магнитного поля у образца не оказалось.

Задача 31.1. Убедиться, что отсутствие сопротивления у сверхпроводников является следствием эффекта Мейсснера.

Более детальные исследования показали, что магнитное поле все же проникает в сверхпроводник на небольшую глубину $\lambda \approx 10^{-5}$ см, затухая в нем по закону $\exp(-x/\lambda)$. Однако если ограничиться макроскопическим описанием массивных образцов,

рода, примером которых может служить сплав ниобия с оловом Nb_3Sn , имеющий $H_{\text{кр}}=2 \cdot 10^5$ Э и $T_{\text{кр}}=18,1$ К).

В первые годы изучения сверхпроводимости многие исследователи склонны были рассматривать сверхпроводники как идеальные проводники, т. е. проводники с бесконечной проводимостью ($\sigma=\infty$). Одна-

размеры которых значительно превышают глубину проникновения магнитного поля в образец, то можно считать, что внутри сверхпроводников $\mathbf{B}=0$ (и точно так же $\mathbf{H}=\mathbf{M}=0$). Поэтому из основных уравнений магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{B}=0, \operatorname{rot} \mathbf{H}=4\pi \mathbf{j}/c \quad (31.4)$$

следует, что сверхпроводящие токи текут лишь в тонком поверхностном слое образца. При этом поверхностная плотность тока может быть найдена из граничных условий (12.3) и (12.6), согласно которым

$$(\mathbf{nB})=0, \quad \mathbf{i}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{nH}]. \quad (31.5)$$

Это означает, что вблизи сверхпроводника вектор индукции \mathbf{B} направлен касательно к его поверхности, а касательная составляющая \mathbf{H} определяет силу и направление поверхностного тока.

Так как в сверхпроводниках $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$, то следует пользоваться методом векторного потенциала, а не скалярного. Полагая $\mathbf{B}=\operatorname{rot} \mathbf{A}$, находим, что внутри сверхпроводников $\operatorname{rot} \mathbf{A}=0$, т. е.

$$\mathbf{A}=\nabla\chi. \quad (31.6)$$

Если сверхпроводящая область V односвязна, то скалярная функция χ однозначна. Это видно из того, что в этом случае на любой замкнутый контур C , проведенный в V , всегда можно натянуть поверхность S , целиком лежащую в V . Но тогда на S будет $\operatorname{rot} \mathbf{A}=0$ и приращение χ при обходе контура C , согласно теореме Стокса, оказывается равным

$$[\chi]=\oint_C(\mathbf{A}d\mathbf{l})=\int_S(\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{A})dS=0. \quad (31.7)$$

Учитывая однозначность χ и то, что вектор-потенциал \mathbf{A} задан с точностью до градиента, можно считать, что внутри односвязного сверхпроводника

$$\mathbf{A}=\text{const.} \quad (31.8)$$

Если же область V многосвязна (например, кольцо), то не на всякий контур C можно натянуть поверхность, целиком лежащую в V . Поэтому, используя (31.7), убеждаемся, что функция χ оказывается неоднозначной. В этом случае необходимо пользоваться представлением (31.6), а не (31.8), т. е. избавиться от $\nabla\chi$ с помощью калибровочного преобразования (28.6) невозможно.

Уравнение (31.8) наводит на мысль, что роль сверхпроводников в магнитостатике аналогична роли проводников в электростатике. Однако тот факт, что в магнитостатике сверхпроводников

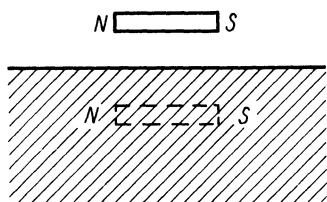


Рис. 31.4

Если небольшой магнитик уронить на поверхность сверхпроводника, то он не долетит до нее, оттолкнется вверх и, немного покачавшись, застынет на некотором расстоянии от поверхности. Причина такого поведения магнитика очень проста: при падении магнита его поле наводит в сверхпроводнике вихревые токи, а магнитное поле этих токов препятствует, по закону Ленца, проникновению внешнего магнитного поля в сверхпроводник. Поле этих токов и выталкивает магнит наверх.

То же самое получается и при использовании метода отражений. Чтобы выполнить граничное условие $(\mathbf{nB})=0$ или (31.8), необходимо, чтобы отраженные магнитные заряды (рис. 31.4) имели те же знаки, что и отражаемые (заметьте, что в методе скалярного потенциала заряды отражаются в свои антиподы). Нетрудно видеть, что при соответствующем отражении токов $[\mathbf{nj}] \rightarrow -[\mathbf{nj}]$ в согласии с (28.14).

Задача 31.2. Найти вектор-потенциал магнитного поля небольшого магнита с моментом \mathbf{m} , расположенного на расстоянии a от сверхпроводящей стенки. Сравните результаты задач 30.2 и 31.2.

Задача 31.3. Два сверхпроводящих провода радиусом a расположены на расстоянии $2l$ друг от друга в среде с проницаемостью μ . По проводам текут равные и противоположно направленные токи I . Найти вектор-потенциал в окружающем пространстве.

Задача 31.4. Сверхпроводящий шар радиусом a помещен в однородное внешнее поле \mathbf{H}_0 . Найти индукцию магнитного поля вне шара и плотность поверхностных токов на нем. То же, в случае цилиндра в поперечном поле \mathbf{H}_0 .

Задача 31.5. Показать, что в односвязном сверхпроводнике при отсутствии внешних магнитных полей не могут протекать стационарные поверхностные токи.

Рассмотрим влияние формы сверхпроводящего образца на его поведение во внешнем магнитном поле. Если, скажем, взять сферический образец, то из результатов задачи 31.4 следует, что во внешнем поле \mathbf{H}_0 , удовлетворяющем условию

$$\frac{2}{3}H_{\text{кр}} \leq H_0 \leq H_{\text{кр}}, \quad (31.9)$$

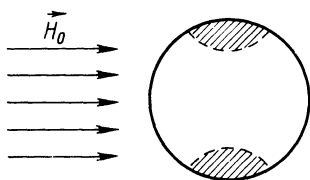


Рис. 31.5

напряженность поля на экваторе будет превышать критическую $H_{\text{кр}}$. Но тогда в экваториальной области сверхпроводник должен перейти в нормальное состояние (рис. 31.5, заштрихованная область), причем на границе нормальной и сверхпроводящей областей внутри шара напряженность поля, очевидно, равна $H_{\text{кр}}$. Но это обстоятельство

тотчас же приводит к противоречию. Действительно, в области V , включающей в себя все пространство вне шара и нормальную зону образца, очевидно, $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Поэтому с учетом уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ имеем

$$\Delta \mathbf{B} = \nabla \text{div } \mathbf{B} - \text{rot rot } \mathbf{B} = 0, \quad (31.10)$$

т. е. \mathbf{B} является векторной гармонической функцией. В таком случае, согласно принципу максимума*, она должна принимать свои экстремальные значения на границах области V . В соответствии с результатами задачи 31.4 на границах V имеем

$$\max B = H_{\text{кр}}, \quad \min B = 0. \quad (31.11)$$

Но тогда всюду в области V справедливо неравенство $0 \leq B \leq H_{\text{кр}}$, из которого следует, что заштрихованная область должна быть не нормальной, а сверхпроводящей.

Чтобы разрешить указанное противоречие, Р. Пайерлс и Ф. Лондон в 1936 г. высказали гипотезу, согласно которой в интервале (31.9) образец переходит в особое состояние, названное ими *промежуточным*. В этом состоянии весь образец распадается на очень мелкие чередующиеся нормальные и сверхпроводящие области, причем в нормальных областях $B = H_{\text{кр}}$, а в сверхпроводящих $B = 0$. В 1937 г. Л. Д. Ландау сделал дальнейшее предположение о ламинарной структуре промежуточного состояния. Согласно Ландау, должны существовать отдельные нити в нормальном состоянии, пронизывающие толщу сверхпроводника параллельно друг другу и выходящие на поверхность образца. Вскоре такая структура действительно была обнаружена на опыте.

§ 32. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Рассмотрим ограниченную систему токов, погруженную в магнетик с проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$. Выделим некоторую область V_0 с границей S , включающую систему токов. Тогда [см. (14.7)] энергия магнитного поля, содержащаяся в V_0 , равна

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{B}\mathbf{H}) dV. \quad (32.1)$$

Полагая $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ и применяя теорему Гаусса — Остроградского, с учетом тождества $\text{div } [\mathbf{H}\mathbf{A}] = (\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H}) - (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A})$ находим

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H}) dV - \frac{1}{8\pi} \oint_S (\mathbf{n} [\mathbf{H}\mathbf{A}]) dS. \quad (32.2)$$

Для ограниченной системы токов, согласно (29.9), асимптотическое поведение вектор-потенциала \mathbf{A} при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\mathbf{A} = [\mathbf{m}\mathbf{r}]/r^3,$$

где \mathbf{m} — полный магнитный момент системы. Отсюда нетрудно получить следующую оценку для поверхностного интеграла в (32.2), приняв, что поверхность S представляет собой сферу

* См. Приложение.